**Областное государственное автономное
профессиональное образовательное учреждение
«Алексеевский агротехнический техникум»**

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ВНЕАУДИТОРНЫХ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ СТУДЕНТОВ ПО ПРЕДМЕТУ «МАТЕМАТИКА»

по специальностям/профессиям среднего профессионального образования

г. Алексеевка

Методические рекомендации разработаны на основе федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования (утверждена приказом Минобрнауки России от 17 мая 2012 г. № 413) с изменениями и дополнениями от: 29 декабря 2014 г., 31 декабря 2015 г., от 11 декабря 2020г., с учётом Примерной основной образовательной программы среднего общего образования (одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию, (протокол от 28 июня 2016 г. № 2/16-з)), Письма Министерства Просвещения Российской Федерации Департамента государственной политики в сфере среднего профессионального образования и профессионального обучения от 30.08.2021г. №05-1136 «О направлении методик преподавания», Федерального закона от 31 июля 2020 г. № 304-ФЗ «О внесении изменений в Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» по вопросам воспитания обучающихся» и составлена в соответствии с требованиями Федерального закона от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» (ред. от 30.04.2021).

Рассмотрено
предметно - цикловой комиссией
естественнонаучных дисциплин
Протокол № 1 от «30» августа 2021 г.
Председатель ___________В.В. Тарарин

Согласован
Заместитель директора ОГАПОУ «ААТ»
____________ А.Е. Новиков
Приказ № 231 от «30» августа 2022 г

Разработчики: ____________________Н.В. Попова, преподаватель ОГАПОУ «Алексеевский агротехнический техникум»
____________________ С.В. Козьменко, преподаватель ОГАПОУ «Алексеевский агротехнический техникум»

Введение

Самостоятельная работа над учебным материалом состоит из следующих элементов:

1. Изучение материала по учебнику.
2. Выполнение еженедельных домашних заданий.
3. Выполнение внеаудиторной самостоятельной работы (ВСР).

В сборнике Вам предлагается перечень внеаудиторных самостоятельных работ, которые вы должны выполнить в течение учебного года.

При выполнении (ВСР) студент может обращаться к преподавателю для получения консультации.

Внеаудиторная самостоятельная работа студентов – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская, проектная работа, выполняемая за рамками расписания учебных занятий по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия и является обязательной для каждого студента.

Целью самостоятельной работы студентов является:

- обеспечение профессиональной подготовки выпускника в соответствии с ФГОС СПО/НПО;
- формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС СПО и ФГОС НПО;
- формирование и развитие профессиональных компетенций, соответствующих основным видам профессиональной деятельности.

Задачами, реализуемые в ходе проведения внеаудиторной самостоятельной работы студентов, в образовательной среде техникума являются:

- систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления: способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- овладение практическими навыками применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности;
- развитие исследовательских умений.

Объем времени, отведенный на внеаудиторную самостоятельную работу, находит свое отражение:

- в рабочем учебном плане – в целом по циклам основной профессиональной образовательной программы, отдельно по каждому из учебных циклов, по каждой дисциплине, междисциплинарному курсу;
- в рабочих программах учебных дисциплин с ориентировочным распределением по разделам и темам.

Контроль результатов самостоятельной работы студентов может осуществляться в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия и самостоятельную работу по дисциплине математика и может проходить в письменной, устной или смешанной форме с предоставлением изделия или продукта творческой деятельности.

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы студента являются:

- уровень освоения учебного материала;
- умение использовать теоретические знания и умения при выполнении практических задач;
- уровень сформированности общих и профессиональных компетенций.

Указания к выполнению ВСР

1. ВСР нужно выполнять в отдельной тетради в клетку, чернилами черного или синего цвета. Необходимо оставлять поля шириной 5 клеточек для замечаний преподавателя.
2. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

3. Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».
4. После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради исправить все отмеченные ошибки и недочеты. Вносить исправления в сам текст работы после ее проверки запрещается.
5. Оценивание индивидуальных образовательных достижений по результатам выполнения ВСР производится в соответствии с универсальной шкалой (таблица).

Процент результативности (правильных ответов)	Качественная оценка индивидуальных образовательных достижений	
	балл (отметка)	вербальный аналог
90 ÷ 100	5	отлично
80 ÷ 89	4	хорошо
70 ÷ 79	3	удовлетворительно
менее 70	2	неудовлетворительно

Учебники:

1. Геометрия, 10-11: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / А.В. Погорелов,(9-е изд.-М.: Просвещение,2015.- 175с.)
2. Алгебра и начала анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / профильный уровень) Мордкович А.Г. и др.)- 6-е изд. М.: Мневозина, 2016 г. 343с.
3. Алгебра и начала анализа: задачник. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / профильный уровень) Мордкович А.Г. и др.)- 6-е изд. М.: Мневозина, 2016 г. 343с

Максимальная учебная нагрузка - 351 час, из них самостоятельная (внеаудиторная) работа студентов 105 часов.

Оглавление

Тема: « Числовые и буквенные выражения»

Самостоятельная работа № 1 Выполнить сообщение по теме: « История возникновения числовых и буквенных выражений»

Цель: привить студентам навыки самостоятельного исследования и умение творчески выполнять работу.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СООБЩЕНИЙ

- ✓ Текст сообщения распечатать на бумаге формата А4.
- ✓ По всем сторонам листа оставить поля от края листа. Размеры: левого поля - 20 мм; правого поля - 10 мм; верхнего поля - 15 мм; нижнего поля - 15 мм.
- ✓ Использовать шрифт Times New Roman. Цвет шрифта должен быть чёрным, кегль – 12 пт. Можно использовать компьютерные возможности акцентирования внимания на определённых терминах, применяя различные способы начертания.
- ✓ Заголовки следует располагать в середине строки без точки в конце и печатать прописными буквами, не подчеркивая.
- ✓ Для абзацев, не являющихся заголовками, установить отступ первой строки на 12,5 мм и выравнивание – по ширине. Расстояние между абзацами – 3 пт.
- ✓ Если в сообщении более одной страницы, то страницы следует нумеровать арабскими цифрами.
- ✓ Обязательно напечатать список использованных источников (название статей, сайтов, или др. и адреса Web-страниц). В сообщении должны быть ссылки на используемую литературу.
- ✓ Не забудьте подписать сообщение (указать фамилию, имя учащегося, подготовившего сообщение).

ТЕМЫ СООБЩЕНИЙ:

1. Системы счислений
2. Египетская знаковая система
3. Вавилонская система счисления
4. Славянский цифровой алфавит
5. Римская система счисления
6. Индийская системы счисления
7. Современная десятичная система счисления
8. История чисел

Основное требование к содержанию: **сообщение должно быть информативно и интересно** для большинства одногруппников.

Самостоятельная работа №2 на тему: Решение алгебраических уравнений и неравенств с одной переменной.

Цель: Знать методы решения линейных, квадратных уравнений и неравенств. Применять их при решении упражнений.

Теоретический материал: 

Простейшее линейное уравнение: $ax + b = 0$.

$$x = -\frac{b}{a}, \text{если} a \neq 0;$$
$$x \in (-\infty; \infty), \text{если} a = 0,$$
$$\text{нет решения}, \text{если} a = 0, b \neq 0.$$

Приведенное квадратное уравнение: $x^2 + px + q = 0$

Теорема Виета: $x_1 + x_2 = -p, x_2 \cdot x_2 = q.$

Решение квадратных уравнений:

$a \cdot x^2 + bx + c = 0$

$D = b^2 - 4ac,$

Если $D > 0$, то $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

Если $D = 0$, то $x = \frac{-b}{2a}$

Если $D < 0$, то корней нет

Алгоритм решения квадратного уравнения	**Решить квадратное уравнение**
	$\mathbf{2x^2 + 5x - 7 = 0}$
1. Найдите коэффициенты квадратного уравнения	a= , b= , c=
2. Запишите формулу для нахождения дискриминанта квадратного уравнения	D=
3. Найдите дискриминант	D=
4. Запишите формулу для нахождения корней квадратного уравнения	$x_{1,2}$=
5. Найдите корни квадратного уравнения	x_1= x_2=
6. Запишите ответ	Ответ:

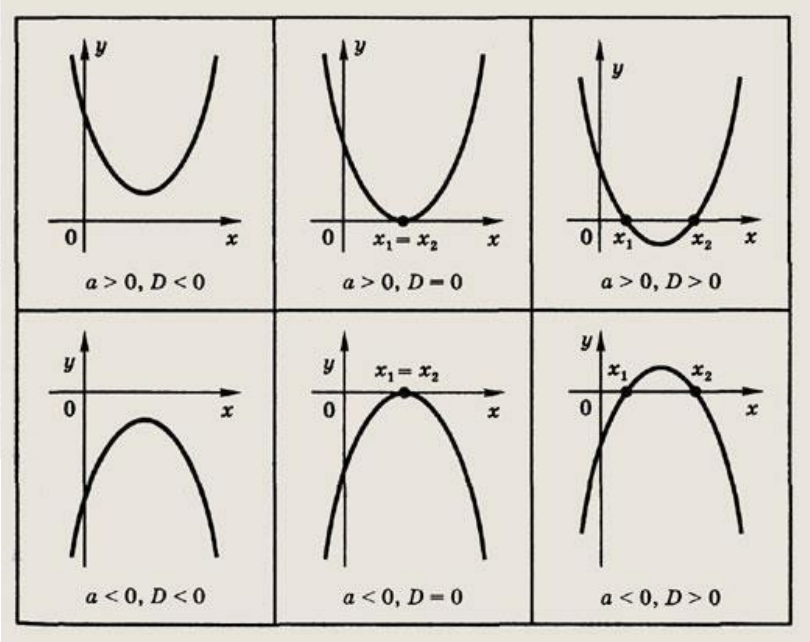
Решить самостоятельно уравнения:

№п/п	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1	$x^2 = 3x$	$x^2 + 3x = 0$	$3x - x^2 = 0$
2	$2x^2 + 4 = 0$	$2x^2 - 4 = 0$	$3x^2 + 27 = 0$
3	$-3x^2 + 27 = 0$	$\frac{x^2}{3} = 3$	$x^2 - 4x = 5$
4	$x^2 - 14x = -48$	$105 + x^2 = 22x$	$4x + x^2 = -15$
5	$x^2 + 8x + 7 = 0$	$\frac{x^2}{x+3} = \frac{x}{x+3};$	$\frac{x^2 - 6x}{x-5} = \frac{5}{5-x}$
6	$\frac{x^2 - 6x}{x-5} - \frac{5}{x-5} = 0$	$\frac{x^2 - 4}{x} = \frac{3+2x}{2}$	$\frac{8}{x} = 3x + 2$
7	$x^2 - 9x + 8 = 0$	$x^2 + x - 6 = 0$	$x^2 + \frac{3}{8} = \frac{5x}{4}$
8	$x^2 + \frac{1}{3} = \frac{7x}{6}$	$2x^2 + 3 = x^2$	$-x^2 + 4x = 3$
9	$\frac{3x+1}{x+2} = 1 + \frac{x-1}{x-2}$	$\frac{2x-2}{x+3} - \frac{x+3}{3-x} = 5$	$\frac{4}{9x^2 - 1} - \frac{4}{3x+1} = \frac{5}{1-3x}$
10	$\frac{4}{x+3} + 1 = \frac{1}{x-3} + \frac{5}{3-x}$	$\frac{3}{x} - \frac{4}{1-x} = \frac{5-x}{x^2-1}$	$\frac{3x-2}{x} + \frac{1}{2-x} = \frac{3x+4}{x^2-2x}$

Теоретический материал 

Алгоритм решения квадратного неравенства $ax^2 + bx + c > 0,\ ax^2 + bx + c < 0$

1. *Найти корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.*
2. *Отметить найденные корни на оси x и определить, куда (вверх или вниз) направлены ветви параболы, служащей графиком функции $y = ax^2 + bx + c$; сделать набросок графика.*
3. *С помощью полученной геометрической модели определить, на каких промежутках оси x ординаты графика положительны (отрицательны); включить эти промежутки в ответ.*



Решить самостоятельно:

	Вариант 1	Вариант 2
1	$4x + 2 < 0$	$-8x - 6 > 0$
2	$-5x - 1 \leq 0$	$5x - 6 \leq -2$
3	$-10x + 4 > -6$	$5x + 9 < -10$
4	$6x - 3 \geq -6 + 8x$	$-3x + 2 < 4 + 3x$
5	$4(2 + x) \leq 1$	$3(-4 - x) \leq 9$
6	$5 - 2(-3x + 5) > 1$	$-2(-3 + 7x) + 6x \leq -8$
7	$x^2 + 8x + 12 < 0$	$x^2 + 3x - 40 > 0$
8	$x^{2}48x - 21 \geq 0$	$x^2 + 5x - 3 \leq 0$

Тема: Функции, их свойства и графики.

Самостоятельная работа №3 на тему: Построение графиков функции

Цель: Уметь по графику функции определить ее свойства. Уметь строить графики функций.

Теоретический материал 

Понятие функции

Если каждому значению **x** из некоторого множества чисел поставлено в соответствие число **y**, то говорят, что на этом множестве задана **функция y(x)**

При этом **x** называют **независимой переменной** или **аргументом**, а **y** – **зависимой переменной** или **функцией.** **y = f(x)**

Область определения и множество значений функции

Областью определения функции называют множество всех значений, которые может принимать ее аргумент. Обозначается D(y)

Множество значений (или область значений) функции – это множество всех значений переменной y. Обозначается E(y)

Способы задания функции

- аналитический (с помощью формулы);
- графический (с помощью графика);
- табличный (с помощью таблицы значений);
- словесный (правило задания функции описывается словами).

Свойства функций:

1. **Монотонность**

Функцию y = f(x) называют **возрастающей** на множестве X, если для любых двух элементов из этого множества, таких, что $x_1<x_2$, выполняется условие $f(x_1) <f(x_2)$.

(Функцию называют возрастающей, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции)

Функцию y = f(x) называют **убывающей** на множестве X, если для любых двух элементов из этого множества, таких, что $\mathbf{x_1<x_2}$, выполняется условие $\mathbf{f(x_1) >f(x_2)}$.

(Функцию называют **убывающей,** если **большему** значению аргумента соответствует **меньшее** значение функции)

2. **Ограниченность**

Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной снизу** на множестве X, если существует число m, такое, что для любого значения $x \in X$, выполняется неравенство

$f(x) > m$.

Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной сверху** на множестве X, если существует число M, такое, что для любого значения $x \in X$, выполняется неравенство

$f(x) < M$.

Если функция ограничена и снизу и сверху, то ее называют ограниченной

3. **Наибольшее и наименьшее значения функции**

Число m называют наименьшим значением функции $y = f(x)$ на множестве X, если:

существует число $x_o \in X$ такое, что $f(x_o) = m$; для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство

$f(x) \geq f(x_o)$.

Число M называют наибольшим значением функции $y = f(x)$ на множестве X, если:

существует число $x_o \in X$ такое, что $f(x_o) = M$;

для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство

$f(x) \leq f(x_o)$.

4. **Четность или нечетность**

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **четной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство **$f(-x) = f(x)$**

График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **нечетной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство **$f(-x) = -f(x)$.**

График нечетной функции симметричен относительно начала координат

5. **Точки экстремума**

Точку x_o называют точкой **максимума** функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки x_o) выполняется неравенство

$f(x) < f(x_o)$.

Точку x_o называют точкой **минимума** функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки x_o) выполняется неравенство

$f(x) > f(x_o)$.

Точки максимума и минимума объединяют общим названием – **точки экстремума**

6. Периодичность

Говорят, что функция y = f(x), x ∊ X имеет **период T**, если для любого x ∊ X выполняется равенство

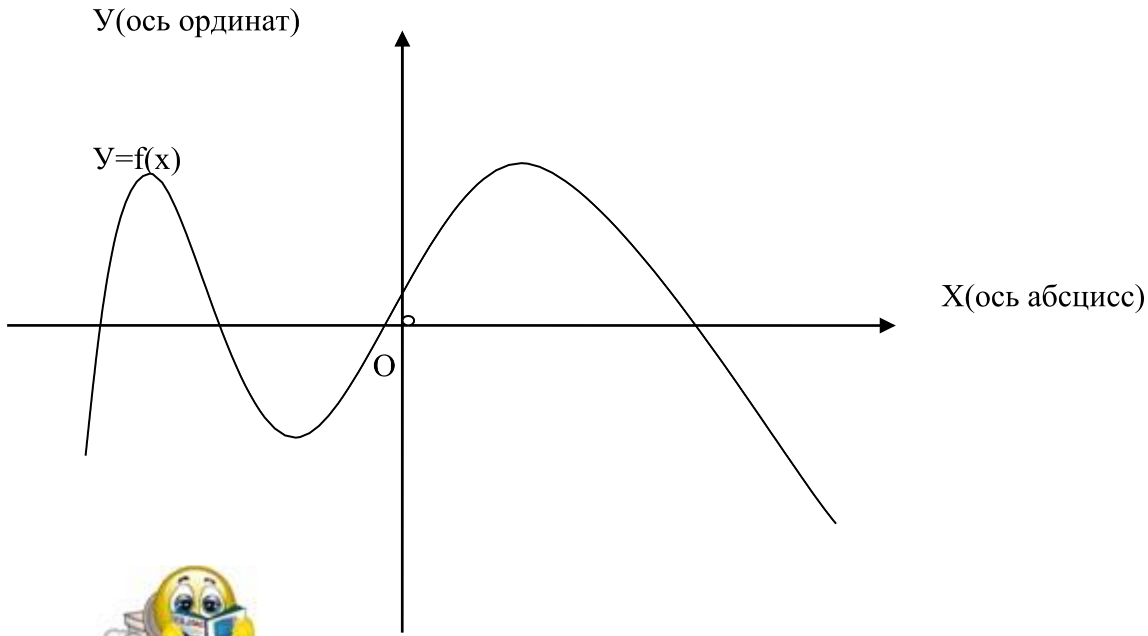
f(x – T) = f(x) = f(x + T).

Функцию, имеющую отличный от нуля период называют **периодической**.

Если функция y = f(x), x ∊ X имеет период T, то любое число, кратное T (т.е. число вида kT, k∊Z), также является ее периодом.

График функции

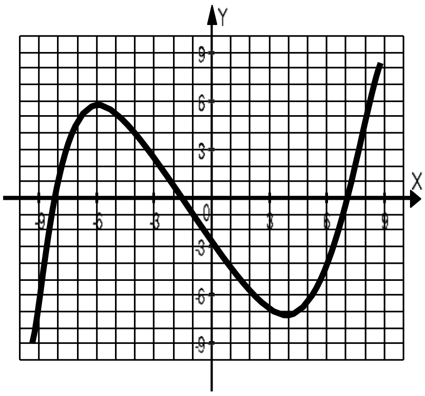
Графиком функции называется множество всех точек координатной плоскости **(x; y(x))**, абсциссы которых равны значениям независимой переменной из области определения этой функции, а ординаты – соответствующим значениям функции



Решить самостоятельно

Вариант 1

1. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке, определите промежуток убывания функции:
1. $(-\infty; 5]$; 2. $(-6; 4)$; 3. $[-6; 4]$; 4. $[4; \infty)$.
2. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке, определить максимум и минимум функции.
3. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке указать область определения и область значения функции.
4. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке, указать промежутки, где $f(x) > 0$.



5. Найти область определения функции $y = \sqrt{x-4}$.

1. $[4;\infty)$; 2. $(4;\infty)$; 3. $(-\infty;4]$; 4. $(-\infty;4)$

6. Укажите наибольшее значение функции $y = 2x - 10$ на отрезке $[-1;2]$.

1. -12; 2. 8; 3. -6; 4. -2.

7. При каких значениях x функция $y = 2x - 4$ принимает положительные значения?

1. $[-2;\infty)$; 2. $(2;\infty)$; 3. $(-\infty;0{,}5)$; 4. $(-\infty;2]$.

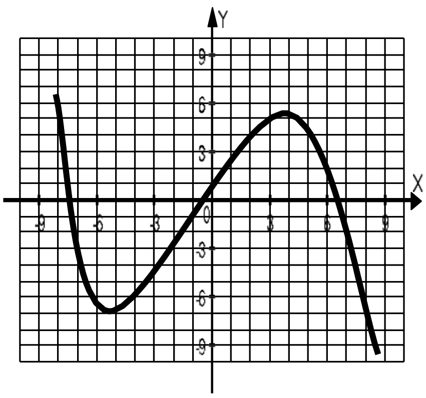
8. Найдите нули функции $y = x^2 + 2x$.

1. $\{-1;-2\}$; 2. $\{0\}$; 3. $\{0;2\}$; 4. $\{0;-2\}$.

9. Постройте график функции: $y = (x-2)^2 + 3$

Вариант 2

1. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке, определите промежуток возрастания функции.
   1. $(-\infty;4]$; 2. $[-5;4]$; 3. $(-5;4)$; 4. $[4;\infty)$.
2. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке, определить максимум и минимум функции.
3. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке указать область определения и область значения функции.
4. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке, указать промежутки, где $f(x) > 0$.



5. Найти область определения функции $y = \frac{5}{x+4}$.

1. $(-\infty;-4)\cup(-4;\infty)$; 2. $(-4;\infty)$; 3. $[4;\infty)$; 4. $(-\infty;-4]\cup[4;\infty)$.

6. Укажите наименьшее значение функции $y = \frac{2}{x+2}$ на отрезке $[0; 2]$.

1. -1; 2. $-\frac{1}{2}$; 3.1; 4.0,5.

7. При каких значениях x функция $y = 3x + 6$ принимает отрицательные значения?

1. $(-2;\ \infty)$; 2. $[2;\ \infty)$; 3. $(-\infty;\ -2)$; 4. $(-\infty; 2]$.

8. Найдите нули функции $y = 3x - x^2$.

1. $\{-1;\ 3\}$; 2. $\{0;\ -3\}$; 3. $\{0\}$; 4. $\{0; 3\}$.

10. Постройте график функции: $y = (x + 2)^2 + 1$.

Тема: Тригонометрия.

Самостоятельная работа №4 выполнить презентацию по теме: « История возникновения тригонометрии»

Цели:

1. Усвоение и закрепление новых знаний полученных при работе с дополнительной литературой и использование интернет ресурсов.
2. Формирование умений и навыков при работе с книгой.

Воспитание самоконтроля

Общие требования к презентации:

- Презентация не должна быть меньше 10 слайдов.
- Первый лист – это титульный лист, на котором обязательно должны быть представлены: название проекта; название выпускающей организации; фамилия, имя, отчество автора; МОУ СОШ, где работает автор проекта и его должность.
- Следующим слайдом должно быть содержание, где представлены основные этапы (моменты) урока-презентации. Желательно, чтобы из содержания по гиперссылке можно перейти на необходимую страницу и вернуться вновь на содержание.
- Дизайн-эргономические требования: сочетаемость цветов, ограниченное количество объектов на слайде, цвет текста.
- В презентации необходимы импортированные объекты из существующих цифровых образовательных ресурсов. (Наиболее приемлемым и удобным в работе является ЦОР «Использование Microsoft Office в школе». К данному ресурсу имеются учебно-методические рекомендации для педагогов. Вновь же пришедшие ЦОРы, в основном, сложны в управлении, требуют от учителя-предметника дополнительных серьёзных знаний в области информатики и ИКТ);
- последними слайдами урока-презентации должны быть глоссарий и список литературы.

Самостоятельная работа №5 на тему: «Тригонометрические функции углов поворота»

Цель работы: 1.Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Тригонометрические функции углов поворота».

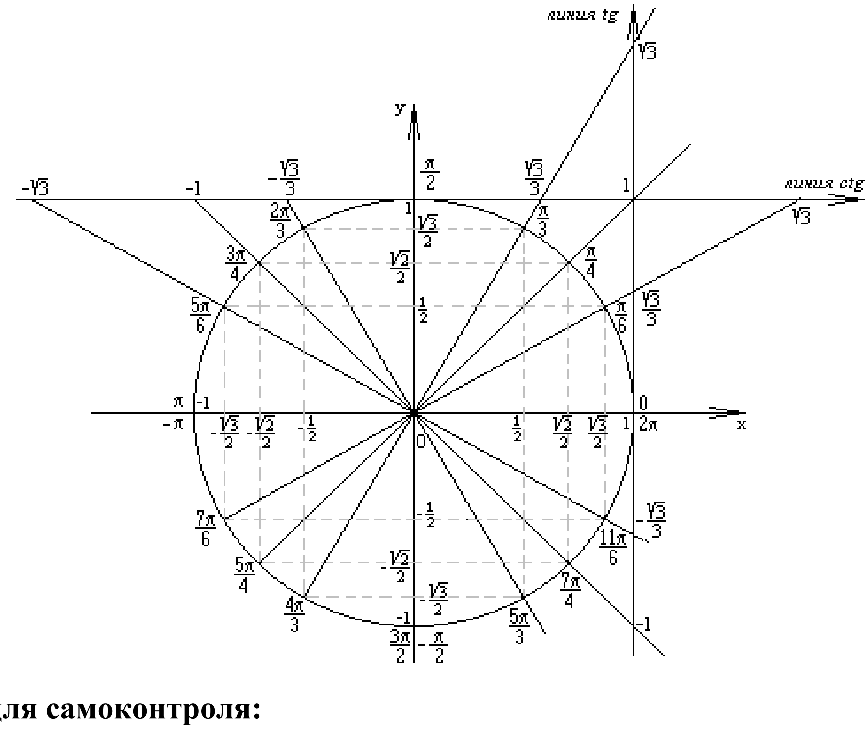
2.Закрепить и систематизировать знания по теме.

3.Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

Теоретический материал

На рисунке совмещены декартова система координат и окружность единичного радиуса. Окружность «эквивалентна» понятию координатной прямой (начало отсчета – точка пересечения окружности с положительной частью оси Ox, положительное направление – против часовой стрелки, единичный отрезок выражен через число π). На окружности отмечены точки, полученные при повороте радиуса окружности, совпадающего с положительной частью оси Ox, на различные углы α . Абсциссы этих точек – $cos\alpha$,

ординаты – $sin\alpha$. Дополнительно проведены две касательные к окружности (линии тангенса и котангенса).



Вопросы для самоконтроля:

1. Ответить на контрольные вопросы:

а) Что такое угол в 1 радиан?

б) Дайте определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла в) Как зависят знаки $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$ от того, в какойкоординатной четверти расположена точка P_α? Назовите этизнаки.

2. Изучить условие заданий для практической работы.
3. Оформить отчет о работе.

Решить самостоятельно один из вариантов:

Вариант 1.

1. Выразите величину угла: а) в радианной мере: 18^0, -250^0; б) в градусной мере: $\frac{\pi}{15}$, $-\frac{\pi}{3}$.
2. Отметьте на единичной окружности точку P_α. Покажите на чертеже значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если α равно $\frac{\pi}{3}$.
3. Определите знак: $\sin\left(-212^0\right)$ и $ctg\frac{7\pi}{9}$.
4. Вычислите: а) $2\cos\frac{3\pi}{2}-\frac{1}{2}tg\pi+\sin\frac{\pi}{2}$; б) $\dfrac{\sin 4\pi-\sin\frac{5\pi}{2}+\cos 3\pi}{\cos 8\pi}$.

Вариант 2.

1. Выразите величину угла: а) в радианной мере: -360^0; 225^0; б) в градусной мере: $\frac{\pi}{18}$; $\frac{3\pi}{2}$.
2. Отметьте на единичной окружности точку P_α. Покажите на чертеже значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если α равно $-\frac{\pi}{4}$.
3. Определите знак: $\cos 305^0$ и $tg\left(-\frac{6\pi}{5}\right)$.
4. Вычислите: а) $2\sin\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}ctg\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cos 2\pi$; б) $\dfrac{tg 8\pi-ctg\frac{7\pi}{2}+\sin 3\pi}{1+tg\frac{5\pi}{4}+ctg\frac{\pi}{4}}$.

Вариант 3.

1. Выразите величину угла: а) в радианной мере: -10^0; 240^0; б) в градусной мере: $\frac{\pi}{9}$; 3π.
2. Отметьте на единичной окружности точку P_α. Покажите на чертеже значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если α равно $\frac{5\pi}{2}$.

3. Определите знак: $cos\left(-105^0\right)$ и $ctg\dfrac{11\pi}{9}$.

4. Вычислите: а) $\left(sin\dfrac{\pi}{2}\right)^{cos\pi}+\left(cos2\pi\right)^{sin1,5\pi}$; б) $cos420^0+sin720^0-tg405^0$.

Вариант 4.

1. Выразите величину угла: а) в радианной мере -60^0, 135^0; б) в градусной мере $\dfrac{\pi}{4}$, $-\dfrac{11\pi}{6}$.
2. Отметьте на единичной окружности точку P_α. Покажите на чертеже значения $sin\alpha$ и $cos\alpha$, если α равно $-\dfrac{\pi}{6}$.
3. Определите знак: $sin\left(-324^0\right)$ и $tg\dfrac{9\pi}{4}$.
4. Вычислите: а) $\left(tg\dfrac{\pi}{3}\right)^{tg\frac{\pi}{4}}+\left(tg\dfrac{\pi}{6}\right)^{sin\pi}$;

   б) $\sqrt{2}\,sin\left(-765^0\right)-cos\left(-1140^0\right)+tg585^0+\sqrt{3}ctg\left(-240^0\right)$.

Вариант 5.

1. Выразите величину угла: а) в радианной мере 165^0, 300^0; б) в градусной мере $\dfrac{2\pi}{3}$, $\dfrac{13\pi}{6}$.
2. Отметьте на единичной окружности точку P_α. Покажите на чертеже значения $sin\alpha$ и $cos\alpha$, если α равно $-\dfrac{13\pi}{2}$.
3. Определите знак: $sin217^0$ и $tg4$.
4. Вычислите: а) $sin\dfrac{\pi}{6}-4cos\dfrac{\pi}{3}+2tg\dfrac{\pi}{4}$; б) $cos\left(-3\pi\right)+sin\left(-\dfrac{15\pi}{2}\right)-ctg\left(-\dfrac{7\pi}{2}\right)-tg\left(-\dfrac{21\pi}{4}\right)$.

Вариант 6.

1. Выразите величину угла: а) в радианной мере -315^0, 405^0; б) в градусной мере $\dfrac{7\pi}{20}$, $\dfrac{\pi}{3}$.
2. Отметьте на единичной окружности точку P_α. Покажите на чертеже значения $sin\alpha$ и $cos\alpha$, если α равно $\dfrac{9\pi}{4}$.
3. Определите знак: $cos\dfrac{5\pi}{6}$ и $sin1,2\pi$.
4. Вычислите: а) $\sqrt{2}\,sin\dfrac{\pi}{4}+3tg\dfrac{\pi}{4}-5cos\dfrac{3\pi}{2}$; б) $cos\left(-5\pi\right)+ctg\left(-\dfrac{11\pi}{2}\right)-sin\left(-\dfrac{5\pi}{2}\right)+3ctg\left(-\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

Вариант 7.

1. Выразите величину угла: а) в радианной мере 750^0, -12^0; б) в градусной мере $\frac{3\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{10}$.
2. Отметьте на единичной окружности точку P_α. Покажите на чертеже значения $sin\alpha$ и $cos\alpha$, если α равно -225^0.
3. Определите знак: $sin\,2{,}8\pi$ и $ctg\,237^0$.
4. а) Проверьте справедливость равенства: $cos30^0 \cdot tg30^0 - 1 = ctg60^0\left(1 + sin^2 45^0\right)$;

   б) Упростите: $\dfrac{a^2 cos\,2\pi - ab\,sin\frac{3\pi}{2} + 6a^2b^2\,sin\,0 - abcos\pi + b^2\,sin\frac{\pi}{2}}{a^3\,sin\frac{5\pi}{2} + 3a^2b\,sin\frac{9\pi}{2} - 3ab^2\,cos\pi - b^3\,cos15\pi}$.

Вариант 8.

1. Выразите величину угла: а) в радианной мере 20^0, 270^0; б) в градусной мере $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{4}$.

2. Отметьте на единичной окружности точку P_α. Покажите на чертеже значения $sin\alpha$ и $cos\alpha$, если α равно $\frac{3\pi}{4}$.
3. Определите знак: $sin\,310^0$ и .
4. Вычислите: а) $\dfrac{sin^3\left(-30^0\right) - 2tg\left(-30^0\right) - 1}{2 + tg\left(-45^0\right) + 4\,cos^2\left(-60^0\right)}$; б) $ctg^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - tg\left(3{,}25\pi\right) - cos\frac{13\pi}{6} - sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Самостоятельная работа №6 на тему: Решение тригонометрических уравнений

Цель: 1. Закрепить навыки определения типов тригонометрических уравнений (простейшее, квадратное относительно $sin\,x$, $cos\,x$, tgx, однородное относительно $sin\,x$ и $cos\,x$, уравнение, решаемое разложением на множители левой части).

2. Усвоить алгоритмы решения основных типов тригонометрических уравнений.

Выполните задания:

1. Ответить на контрольные вопросы:

   а) Дайте определения арксинуса, арккосинуса арктангенса и арккотангенса числа *a*.

б) Перечислите свойства обратных тригонометрических функций.

в) Вспомните формулы, с помощью которых решают простейшие тригонометрические уравнения.

г) Какой вид имеет квадратное относительно $\sin x$, $\cos x$, tgx тригонометрическое уравнение? Объясните алгоритм его решения.

д) Какой вид имеет однородное относительно $\sin x$ и $\cos x$ тригонометрическое уравнение? Какова методика его решения?

е) Вспомните формулы, с помощью которых решают простейшие тригонометрические уравнения.

2. По образцу выполнить тренировочные задания.
3. Изучить условие задания для самостоятельной работы.
4. Оформить отчет о работе.

Теоретический материал

Формулы для повторения

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a$

$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a$

Общие формулы решения тригонометрических уравнений

I. $\sin x = a,\ \lvert a\rvert \le 1;$ x $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n\,\epsilon$	II. $\cos x = a,\ \lvert a\rvert \le 1$ $x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n\,\epsilon\, z$
II$tgx = a$, a – любое число T $x = \mathrm{arctg}\, x + \pi n,\ n\epsilon z$	I $ctg\, x = a$, a – любоечисло $x = \mathrm{arcctg} x + \pi n,\ n\epsilon z$

Частные решения тригонометрических уравнений

$\sin x=0$ $x=\pi n,\ n\epsilon z$	$\sin x=1$ $x=\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\quad n\epsilon z$	$\sin x=-1$ $x=-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n\epsilon z$
$\cos x=0$ $x=\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n\epsilon z$	$\cos x=1$ $x=2\pi n,\ n\epsilon z$	$\cos x=-1$ $x=\pi + 2\pi n,\ n\epsilon z$

Значение тригонометрических функций

град	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
радиан	**0**	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не существ
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	Не существ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Формулы для повторения:

$ax^2 + bx + c = 0,\ D = b^2 - 4\cdot a\cdot c.$

Если $D > 0$, то корни квадратного уравнения находим по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Образец решения:

Пример1. Вычислите: $2\,arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + arcctg1$.

Решение

$2\,arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + arcctg1 =$

$= -2\,arcsin\frac{1}{2} + \left(\pi - arccos\frac{1}{2}\right) + arctg1 = -2\cdot\frac{\pi}{6} + \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}.$

Задания для самоконтроля

Вычислите: а) $sin\left(arcsin\frac{1}{2}\right)$; б) $cos(arctg1)$; в) $3arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + arctg(-1)$;

г) $2\,arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Пример 2. Решите уравнение: $sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -1$.

Решение:

По формуле частного случая:

$\frac{\pi}{4} - x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad -x = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad -x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad x = \frac{3\pi}{4} - 2\pi n, \; n \in Z$.

Пример 3. Решите уравнение: $2cos3x = -\sqrt{2}$.

Решение.

Разделим левую и правую части уравнения на 2: $cos3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

По формуле $t = \pm arccosa + 2\pi n$ получаем:

$3x = \pm arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, \quad 3x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n, \quad 3x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$.

Разделим левую и правую части уравнения на 3: $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{3}, \; n \in Z$.

Пример 4. Решите уравнение: $3tg\frac{5}{3}x - 1 = 0$.

Решение:

Выразим $tg\frac{5}{3}x$: $3tg\frac{5}{3}x = 1, \quad tg\frac{5}{3}x = \frac{1}{3}$.

По формуле $t = arctga + \pi n$ получаем: $\frac{5}{3}x = arctg\frac{1}{3} + \pi n$.

Разделим левую и правую части уравнения на $\frac{5}{3}$: $x = \frac{3}{5}arctg\frac{1}{3} + \frac{3\pi n}{5}, \; n \in Z$.

Задания для самоконтроля:

Решите уравнения: а) $2sin3x = -1$; б) $-2cos\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$; в) $\sqrt{3}tg\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$

Варианты самостоятельной работы (на выбор)

<u>Вариант 1</u>

1. Вычислите: $arcsin\frac{1}{2} + arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 3arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.
2. Решите уравнения: а) $sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; б) $cos3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 3$.

<u>Вариант 2</u>

1. Вычислите: $arcctg\left(-\sqrt{3}\right)-arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+0{,}83\,arccos1$.
2. Решите уравнения: а) $sin\,2x=\frac{1}{2}$; б) $cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$; в) $tg\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-2$.

Вариант 3

1. Вычислите: $sin\left(arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
2. Решите уравнения: а) $sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$; б) $cos3x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $tg\,2x=-\sqrt{3}$.

Вариант 4

1. Вычислите: $cos\left(arccos\frac{1}{2}\right)$.
2. Решите уравнения: а) $sin\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$; в) $tg\left(2x-\frac{\pi}{10}\right)=0$.

Вариант 5

1. Вычислите: $tg\left(arctg\sqrt{3}\right)$.
2. Решите уравнения: а) $2\,sin\,2x=-1$; б) $cos\frac{x}{4}=\frac{4}{5}$; в) $tg\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Вариант 6

1. Вычислите: $ctg\left(arctg\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
2. Решите уравнения: а) $sin\,x=\frac{3}{5}$; б) $cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$; в) $3tg\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$.

Вариант 7

1. Вычислите: $sin\left(arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
2. Решите уравнения: а) $2\,sin\,x=-\sqrt{2}$; б) $cos\left(1-x\right)=\frac{1}{2}$; в) $tg\frac{x}{2}=-\sqrt{3}$.

Вариант 8

1. Вычислите: $tg\left(arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
2. Решите уравнения: а) $2\,sin\frac{x}{2}=\sqrt{3}$; б) $cos\,4x=-0{,}25$; в) $tg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

Вариант 9

1. Вычислите: $arccos\left(sin\frac{5\pi}{6}\right)$.
2. Решите уравнения: а) $sin\left(3-\frac{x}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$; в) $tg\,2x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Вариант 10

1. Вычислите: $arctg\left(ctg\frac{3\pi}{4}\right)$.
2. Решите уравнения: а) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{2}\cos(4+x)=-1$; в) $tg\left(-\frac{x}{2}\right)=1$.

Образцы решения тригонометрических уравнений второго порядка:

Образец№1

Решить уравнение:

$2\sin^2x-5\sin x+2=0$

Решение. Введем новую переменную: z = sinx. Тогда уравнение примет вид: $2z^2-5z+2=0$. Решая квадратное уравнение, находим $z_1=2$ и $z_2=\frac{1}{2}$.

Значит, либо sinx = 2, либо sinx = $\frac{1}{2}$. Первое уравнение не имеет корней, а из второго находим

$x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n,\ n\epsilon z$

$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\epsilon z$

Образец №2

Решить уравнение:

$\cos^2x-\sin^2x-\cos x=0$

Решение:

Воспользуемся тем, что $\sin^2x=1-\cos^2x$

Тогда заданное уравнение можно записать в виде:

$\cos^2x-(1-\cos^2x)-\cos x=0$

После преобразования получим:

$2\cos^2x-\cos x-1=0$

Введем новую переменную z = cosx. Тогда данное уравнение примет вид:

$2z^2-z-1=0$. Решая его, находим $z_1=1$, $z_2=-\frac{1}{2}$

Значит, либо cosx = 1, либо cosx = $-\frac{1}{2}$

Решая первое уравнение cosx = 1, как частное, находим его решение

$x=2\pi n,\quad n\epsilon z$.

Решая второе уравнение, находим решение:

$x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n, n\epsilon z$

$x=\pm(\pi-\arccos\frac{1}{2})+2\pi n, n\epsilon z$

$x=\pm(\pi-\frac{\pi}{3})+2\pi n,\ n\epsilon z$

$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\quad n\epsilon z$

Образец №3

Решить уравнение:

$3\sin^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+5\cos x=2$

Решение:

С числом 2, содержащимся во правой части, поступим следующим образом. Известно, что $\sin^2x + \cos^2x = 1$ - это тождество верно для любого значения x.

Тогда $2(\sin^2x + \cos^2x) = 2\sin^2x + 2\cos^2x = 2$.

Заменив в первом уравнении 2 на $2\sin^2x + 2\cos^2x$, получим:

$3\sin^2x - 2\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2x = 2\sin^2x + 2\cos^2x$

$3\sin^2x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 5\cos^2x - 2\sin^2x - 2\cos^2x = 0$

$\sin^2x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 3\cos^2x = 0$

Обе части уравнения разделим на $\cos^2 x$ почленно

$$\frac{\sin^2x}{\cos^2x} - \frac{2\sqrt{3}\sin x\cos x}{\cos^2x} + \frac{3\cos^2x}{\cos^2x} = 0$$

Так как $\frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}x$, то полученное уравнение запишем в виде:

$\mathrm{tg}^2x - 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}x + 3 = 0$

Введя новую переменную t=tgx, получим квадратное уравнение:

$t^2 - 2\sqrt{3}t + 3 = 0$, решая уравнение, получим: $t = \sqrt{3}$

Итак, $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$

$x = \mathrm{arctg}\sqrt{3} + \pi n$,

$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Решить самостоятельно

Вариант №1	**Вариант №2**
Решить уравнения: 1. $3\sin^2x - 5\sin x - 2 = 0$ 2. $3\cos^2 2x + 10\cos 2x + 3 = 0$ 3. $3\cos^2x + 10\cos x + 3 = 0$ 4. $2\sin^2x + 3\cos x = 0$ 5. $3\mathrm{tg}^2x + 2\mathrm{tg}x - 1 = 0$ 6. $2\sin^2x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2x = 0$ 7. $2\cos^2x - \sin x\cos x + 5\sin^2x = 3$	Решитьуравнения: 1. $6\cos^2x + \cos x - 1 = 0$ 2. $2\sin^2 2x - 3\sin 2x + 1 = 0$ 3.$2\sin^2x - 3\sin x + 1 = 0$ 3. $5\cos^2x + 6\sin x - 6 = 0$ 4. $2\mathrm{tg}^2x + 3\mathrm{tg}x - 2 = 0$ 5. $3\cos^2x + 10\sin x\cos x + 3\sin^2x = 0$ 6. $2\sin^2x - 3\sin x\cos x + 4\cos^2x = 4$

Самостоятельная работа №7 на тему«Преобразование тригонометрических выражений»

Цель: 1.Корректировать умение применять тригонометрические формулы при преобразовании тригонометрических выражений.

2.Закрепить и систематизировать знания по теме.

Теоретический материал:

Основные формулы тригонометрии

$sin^2x + cos^2x = 1;$

$sin^2x = 1 - cos^2x;$

$cos^2x = 1 - sin^2x;$

$tgx = \frac{sinx}{cosx}$; $ctgx = \frac{cosx}{sinx}$; $tgx \cdot ctgx = 1; tgx = \frac{1}{ctgx}$; $ctgx = \frac{1}{tgx}$.

Синус и косинус суммы и разности аргументов:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta + \cos\alpha$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta + \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Формулы двойного аргумента:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = (\cos\alpha)^2 - (\cos\alpha)^2$

$tg2\alpha = \frac{2 \cdot tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

Формулы понижения степени:

$(\sin\alpha)^2 = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$(\cos\alpha)^2 = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

Преобразование сумм тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Тренировочный материал

Тема: «*Основные тригонометрические формулы»*

1. Основное тригонометрическое тождество $sin^2\alpha + ... = ...$ выполняется при любых значениях α .
2. Упростите выражения: а) $1 - cos^2\alpha$; б) $(1 - sin\alpha)(1 + sin\alpha)$.
3. Следствием из основного тригонометрического тождества является формула, выражающая $sin\alpha$ через $cos\alpha$: $sin\alpha = ...$
4. Найдите значение тригонометрической функции $cos\alpha$, если известно, что $sin\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
5. Тангенсом угла α называется отношение **...** угла α к его **...**: $tg\alpha = ...$
6. Из определения тангенса и котангенса следует: $tg\alpha ctg\alpha = ...$

7. Соотношение между тангенсом и косинусом одного и того же угла $1+tg^2\alpha = ...$, когда $cos\alpha ...$.

8. Формула $tg\alpha = \dfrac{sin\alpha}{cos\alpha}$ не имеет смысла при $\alpha = ...$.

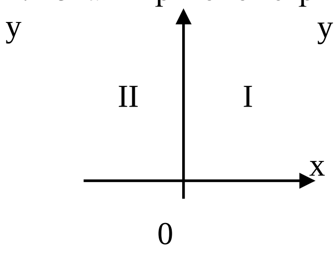
9. Преобразуйте выражения: а) $tg\alpha\, cos\alpha$; б) $\dfrac{sin\alpha}{tg\alpha}$; в) $sin^2\beta - sin^2\beta\, cos^2\beta$.

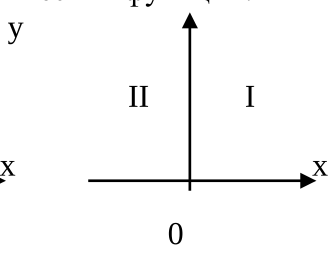
10. Упростите: а) $\dfrac{cos\alpha}{1+sin\alpha} + \dfrac{1+sin\alpha}{cos\alpha}$; б) $\dfrac{1+tg^4\alpha}{tg^2\alpha + ctg^2\alpha}$.

11. Докажите тождество: $\dfrac{ctg\alpha}{tg\alpha + ctg\alpha} = cos^2\alpha$.

Тема: «*Формулы приведения*»

1. Знаки тригонометрических функций:





IIIIVIIII

знаки синуса знаки тангенса

2. Четность и нечетность тригонометрических функций:

$sin(-\alpha) = ...;$ $cos(-\alpha) = ...;$ $tg(-\alpha) = ...$.

Вывод: четной функцией является **...**.

3. Найдите значения выражений: а) $sin(-30^0)$; б) $cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$; в) $tg\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. Тригонометрические функции углов вида $\dfrac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\dfrac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ могут быть выражены через функции угла α с помощью формул приведения:

$sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = ...;$ $cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = ...;$ $tg\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = ...;$ $ctg\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = ...;$

$sin(180^0 + \alpha) = ...;$ $cos(180^0 + \alpha) = ...;$ $tg(180^0 + \alpha) = ...;$ $ctg(180^0 + \alpha) = ...;$

$sin(360^0 - \alpha) = ...;$ $cos(360^0 - \alpha) = ...;$ $tg(360^0 - \alpha) = ...;$ $ctg(360^0 - \alpha) = ...;$

$sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = ...;$ $cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = ...;$ $tg\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = ...;$ $ctg\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = ...$

5. Вычислите: а) $sin 240^0$; б) $tg 300^0$; в) $sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) tg\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

г) $sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) tg\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)$; д) $tg\left(\dfrac{3\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Тема: «*Формулы сложения*»

1. Для любых α *и* β справедливы равенства: а) $sin(\alpha + \beta) = sin\alpha\, cos\beta + ...;$

б) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\ldots$; в) $tg(\alpha+\beta)=\ldots.$

2. Вычислите: а) $\sin 75^0$; б) $\cos 105^0$.
3. Упростите: а) $\cos 33^0\cos 63^0-\sin 33^0\sin 63^0$; б) $\sin\frac{5\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}$;

   в) $\sin 27^0 20'\cos 32^0 40'+\cos 27^0 20'\sin 32^0 40'$; г) $\frac{tg 73^0-tg 13^0}{1+tg 73^0\, tg 13^0}$.

Тема: *«Формулы двойного угла»*

1. $\sin 2\alpha=2\ldots.$
2. $tg 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{\ldots}$.
3. Упростите: а) $\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$; б) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$.
4. Вычислите: а) $2\sin 75^0\cos 75^0$; б) $\sin 15^0\cos 15^0$; в) $\frac{1-ctg^2 15^0}{2ctg 15^0}$.

Тема: *«Формулы суммы и разности тригонометрических функций»*

1. Формула суммы синусов двух углов: $\sin\alpha+\sin\beta=2\ldots.$
2. Формула разности косинусов двух углов: $\cos\alpha-\cos\beta=2\ldots.$
3. Формула суммы тангенсов двух углов: $tg\alpha+tg\beta=\frac{\ldots}{\cos\alpha\cos\beta}$.
4. Преобразуйте в произведения: а) $\sin 15\alpha+\sin 3\alpha$; б) $\cos 27\alpha+\cos 17\alpha$; в) $\cos 5^0-\cos 15^0$; г) .
5. Упростите: а) $\frac{\sin 7\alpha+\sin\alpha}{\cos 7\alpha+\cos\alpha}$; б) $\frac{\cos 4\alpha+\cos 6\alpha}{\cos\alpha+\cos 9\alpha}$; в) $tg 3\alpha-tg\alpha$.
6. Докажите тождества: а) $\frac{\sin 56^0+\sin 14^0}{\cos 56^0+\cos 14^0}=ctg 55^0$;

   б) $\frac{\sin 3\alpha+\sin 7\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 7\alpha}=ctg\left(\frac{\pi}{2}-5\alpha\right)$.
7. Докажите, что $\sin 20^0+\sin 40^0-\cos 10^0=0$.

Варианты самостоятельной работы

Вариант 1

1. Дано: $\cos\alpha=-0,6$; $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите:

а) $\sin\alpha$; б) $\sin 2\alpha$; в) $tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

2. При всех допустимых значениях α докажите тождество $\frac{\cos\alpha-\cos 5\alpha}{\sin 5\alpha+\sin\alpha}=tg 2\alpha$.

Вариант 2

1. Упростите выражение $\dfrac{2\sin(\pi-\alpha)\cos\alpha}{\cos(\pi+\alpha)\sin^3\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\sin(\pi-\alpha)\cos^3\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$.

2. Докажите тождества:

а) $\dfrac{1-\cos 2t+\sin 2t}{1+\sin 2t+\cos 2t}=tgt$; б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\alpha$.

Вариант 3

1. Дано: $\sin\alpha=0{,}8$; $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите:

а) $\cos\alpha$; б) $\sin 2\alpha$; в) $tg\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

2. При всех допустимых значениях α докажите тождество $\dfrac{\sin 3\alpha-\sin\alpha}{\cos 3\alpha+\cos\alpha}=tg\alpha$.

Вариант 4

1. Упростите выражение $\dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin^3(\pi-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)\sin^3\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{2\sin\alpha\cos(2\pi-\alpha)}$.

2. Докажите тождества:

а) $\dfrac{1+\cos 2t-\sin 2t}{1+\sin 2t+\cos 2t}=tg\left(\dfrac{\pi}{4}-t\right)$; б) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\alpha+\cos\left(\alpha-\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Вариант 5

1. Вычислите $\sin(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha=-\dfrac{8}{17}$, $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.

2. При всех допустимых значениях α упростите выражение:

а) $1+\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha$; б) $\dfrac{2\sin^2\alpha}{1+\cos(\pi-2\alpha)}-\sin^2\alpha$.

Вариант 6

1. Найдите $tg(\alpha+\beta)$, если $tg\alpha=\dfrac{3}{4}$, $\cos\beta=\dfrac{3}{5}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$.

2. Упростите выражение при всех допустимых значениях α:

а) $\dfrac{2\cos\alpha-\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha-\sin\alpha+\cos^2\alpha}$; б) $\dfrac{2\cos^2\alpha}{1-\sin(1{,}5\pi+2\alpha)}-\cos^2\alpha$.

Вариант 7

1. Вычислите $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$, $\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$.

2. При всех допустимых значениях α упростите выражение:

а) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{\cos\alpha-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$; б) $\dfrac{\cos(2\pi-2\alpha)}{ctg^2\alpha-1}-\sin^2\alpha$.

Вариант 8

1. Найдите $tg(\alpha+\beta)$, если $sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $tg\beta = \frac{1}{3}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

2. Упростите выражение при всех допустимых значениях α :

а) $\dfrac{1-sin\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{sin(\pi-3\alpha)-sin(-\alpha)}$;   б) $\dfrac{sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}{1-tg^2\alpha}-cos^2\alpha$.

Самостоятельная работа №8 : Составить словарь основных понятий по теме «Тригонометрия».

Цели: 1.Усвоение и закрепление новых знаний полученных при работе с учебной литературой.

2.Формирование умений и навыков при работе с учебной, дополнительной литературой и интернет-ресурсы.

Задание: Составьте глоссарий по данной теме, используя учебную, дополнительную литературу, интернет- ресурсы.

Глоссарий - это словарь определенных понятий или терминов, объединенных общей специфической тематикой.

Данный термин происходит от греческого слова "глосса", что означает язык, речь. В Древней Греции глоссами называли непонятные слова в текстах, толкование которых давалось рядом на полях. Собрание гроссов в последствии стали называть глоссарием.

Каково назначение глоссария?

Глоссарий необходим для того, чтобы любой человек, читающий научный текст или, к примеру, вашу работу, мог бы без труда для себя найти объяснение непонятных слов и сложных терминов, которые встретились ему при изучении содержания текста документа или статьи.

Как составить глоссарий?

Для начала внимательно прочитайте и ознакомьтесь с текстом. Наверняка, вы встретите в ней много различных терминов, которые имеются по данной теме. После того, как вы определили наиболее часто встречающиеся термины, вы должны составить из них список. Слова в этом списке должны быть расположены в строго алфавитном порядке, так как глоссарий представляет собой не что иное, как словарь специализированных терминов.

После этого начинается работа по составлению статей глоссария. Статья глоссария - это определение термина. Она состоит из двух частей:

1. точная формулировка термина в именительном падеже;

2. содержательная часть, объемно раскрывающая смысл данного термина.

Советы:

При составлении глоссария важно придерживаться следующих правил:

- стремитесь к максимальной точности и достоверности информации;

- старайтесь указывать корректные научные термины и избегать всякого рода жаргонизмов. В случае употребления такового, давайте ему краткое и понятное пояснение;

- излагая несколько точек зрения в статье по поводу спорного вопроса, не принимайте ни одну из указанных позиций. Глоссария - это всего лишь констатация имеющихся фактов;

- также не забывайте приводить в пример контекст, в котором может употреблять данный термин;

- при желании в глоссарий можно включить не только отельные слова и

термины, но и целые фразы.

1. Угол в 1 радиан-
2. Единичная окружность-
3. Числовая окружность -
4. Аргумент функции-
5. Область значений функции-
6. Целые рациональные функции-
7. Дробно- рациональные функции-
8. График функции-
9. Синус и косинус-
10. Синусоида-
11. Линия синусов-
12. Тангенс и котангенс-
13. Линия тангенсов-
14. Линия котангенсов-
15. Чётная функция-
16. Нечётная функция-
17. Периодическая функция-
18. Возрастающая функция-
19. Убывающая функция-
20. Экстремум функции-
21. Точка максимума-
22. Точка минимума-
23. Арксинус числа а-
24. Арккосинус числа а-
25. Арктангенс числа а-
26. Арккотангенс числа а-

    Оформить отчёт.

Самостоятельная работа № 9 выполнить презентацию на тему: « Определение комплексного числа. Операции над комплексными числами.»

Цели:1.Усвоение и закрепление новых знаний полученных при работе с дополнительной литературой и использование интернет ресурсов.

2.Формирование умений и навыков при работе с книгой, компьютером, интернет-ресурсами. Воспитание самоконтроля

Общие требования к презентации:

- Презентация не должна быть меньше 10 слайдов.
- Первый лист – это титульный лист, на котором обязательно должны быть представлены: название проекта; название выпускающей организации; фамилия, имя, отчество автора; МОУ СОШ, где работает автор проекта и его должность.
- Следующим слайдом должно быть содержание, где представлены основные этапы (моменты) урока-презентации. Желательно, чтобы из содержания по гиперссылке можно перейти на необходимую страницу и вернуться вновь на содержание.
- Дизайн-эргономические требования: сочетаемость цветов, ограниченное количество объектов на слайде, цвет текста.
- В презентации необходимы импортированные объекты из существующих цифровых образовательных ресурсов. (Наиболее приемлемым и удобным в работе является ЦОР «Использование Microsoft Office в школе». К данному ресурсу имеются учебно-методические рекомендации для педагогов. Вновь же пришедшие ЦОРы, в основном, сложны в управлении, требуют от учителя-предметника дополнительных серьёзных знаний в области информатики и ИКТ);
- последними слайдами урока-презентации должны быть глоссарий и список литературы.

Самостоятельная работа № 10 по теме: « Представление комплексных чисел в алгебраической, тригонометрической и показательной формах»

Цель:научиться переводить комплексные числа из алгебраической в тригонометрическую и показательную формы.

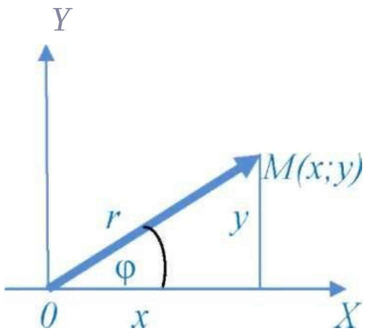
<u>Теоретический материал</u>

Число вида **z = x + iy,** где x и y - любые действительные числа, а i - мнимая единица, определяемая равенством $i^2 = -1$, называется **комплексным числом.**

Числа **x** и **y** называются соответственно **действительной** и **мнимой** частями **комплексного числа z**и обозначаются: **x = Rez, y = Imz.**

Запись комплексного числа в виде **z = x + iy**называется **алгебраической формой** комплексного числа.

Комплексное число z = x + iy может быть изображено в декартовой координатной плоскости XOY либо точкой с **абсциссой x** и **ординатой y,** либо радиус-вектором этой



точки:

Длина этого вектора называется **модулем** комплексного числа z и обозначается $|z|$ **или r:**

$|z|$ = **r** = $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Угол, образованный этим вектором с положительным направлением действительной оси Ox, называется **аргументом** числа z и обозначается **Argz.**

Величина Argzмногозначна и определена с точностью до числа, кратного 2π. Значение Argz, заключённое в пределах от - π до π, называется **главным** и обозначается **argz или** φ**:** $-\pi < \arg z < \pi$, $\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$ считаются **равными,** если соответственно равны их действительные и мнимые части

$\frac{x}{x}$

$x_1 = x_2$. $y_1 = y_2$.

Два комплексных числа z = x + iy и z = x - iy, отличающиеся только знаком мнимой части, называются **сопряжёнными.**

Тригонометрическая и **показательная** формы комплексного числа z = x + iy имеют вид:

z = r(cos ф+ isin<p), z = re$^{i\varphi}$, где r и φ - соответственно модуль и главное значение аргумента комплексного числа z.

Алгоритм:

1) найти модуль комплексного числа по формуле: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$;

2)найти главное значение аргумента комплексного числа по формуле:

$tg\,(\arg z) = tg\,(\varphi) = \frac{y}{x}$

3) представить комплексное число в тригонометрической и показательной формах, используя формулы: $z = r(\cos \phi + i\sin \phi)$, $z = re^{i\varphi}$.

Пример.

Представить в тригонометрической и показательной формах комплексное число $z = 3 + \sqrt{3}i$.

Решение:

1) находим модуль комплексного числа:

$zI = r = |3+\sqrt{3}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} + (\sqrt{3})^2 = 2\sqrt{3}$

2) находим главное значение аргумента комплексного числа z: так как вектор, изображающий число z лежит в I четверти и

$tg\,(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, то $\varphi = \frac{\pi}{6}$

3) находим тригонометрическую форму: $z = 2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$,

4) находим показательную форму: $z = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

Задания для самостоятельной работы

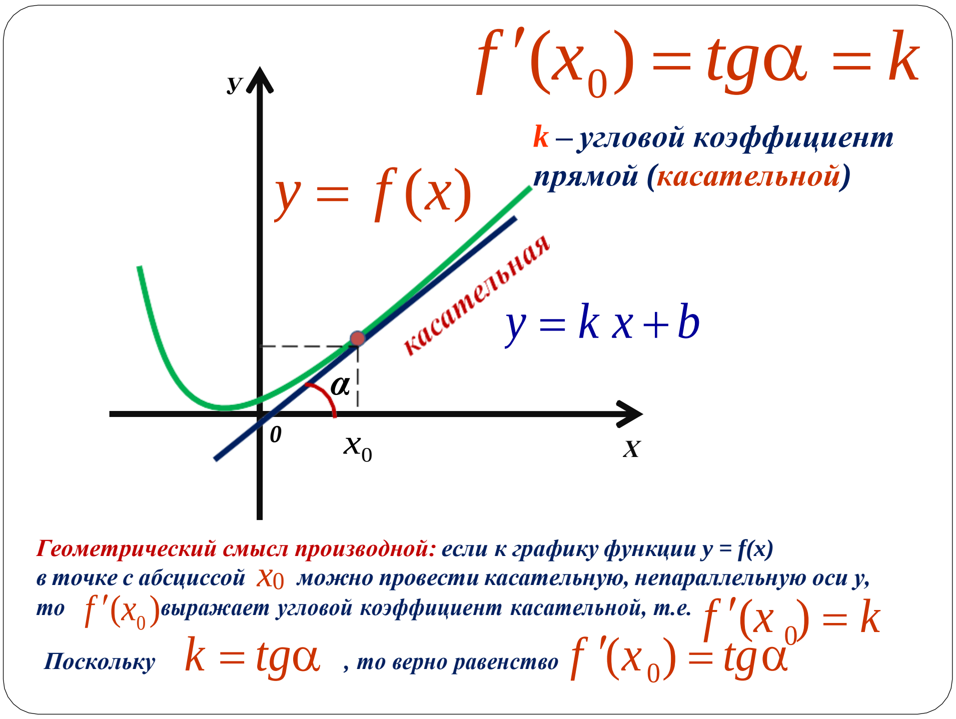
Представить в тригонометрической и показательной формах следующие комплексные числа:

	1	2	3
1	$1 - i$	$-1 + i$	$-2 - 2i$
2	$\sqrt{3} + i$	$-\sqrt{2} + i\sqrt{6}$	$\sqrt{3} + 2i$
3	$-\sqrt{3} + i$	$\sqrt{2} + i\sqrt{6}$	$-\sqrt{3} + 2i$
4	$5 + 2i$	$4 - 5i$	$4 + 2i$

Самостоятельная работа №9 по теме: Геометрический смысл производной

Цель: Иметь понятие о геометрическом смысле производной. Уметь находить тангенс угла наклона касательной к оси ох.

Теоретический материал



Алгоритм написания уравнения касательной к графику функции

1. Записать уравнение касательной в общем виде;

2. Вычислить значение функции в заданной точке. Для этого подставьте в функцию вместо *х* значение данной точки.

3. Найдите производную функции.

4. Вычислить значение производной функции в заданной точке. Для этого подставьте в производную функции вместо *х* значение данной точки.

5. Все полученные результаты подставьте в общее уравнение касательной.

Образец решения:

Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=\cos x$ *в точке с абсциссой*

$x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Решение:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$f(x)'=(\cos x)'=-\sin x;$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}+\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{2}$$ - искомое уравнение касательной.

Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работой, прочитайте ещё раз конспект, учебник и ответьте на следующие вопросы:

1. Что называется угловым коэффициентом касательной?
2. Что называется тангенсом угла наклона?
3. Как записывается уравнение касательной?
4. Алгоритм написания уравнения касательной к графику функции

Решить самостоятельно:

Вариант 1

1. Найти угол между касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0.
   1.1. $f(x)=3x^2$, $x_0=1$.
   1.2. $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $x_0=2$.
   1.3. $f(x)=4\sqrt{x}$, $x_0=4$.
   1.4. $f(x)=5cosx$, $x_0=\frac{\pi}{6}$.
   1.5. $f(x)=sin3x$, $x_0=\frac{\pi}{12}$.
2. Записать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0.
   2.1. $f(x)=x^5-x^3+3x-1$, $x_0=0$.
   2.2. $f(x)=x^3-2x$, $x_0=2$.

Вариант 2

1. Найти угол между касательной к графику функции $y = f(x)$в точке с абсциссой x_0.

1.1.$f(x) = 2x^3, \quad x_0 = 1.$
1.2.$f(x) = \frac{1}{4}x^4, \quad x_0 = 2.$
1.3.$f(x) = 3\sqrt{x}, \quad x_0 = 9.$
1.4.$f(x) = 4sinx, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}.$
1.5.$f(x) = cos5x, \quad x_0 = \frac{\pi}{20}.$

2. Записать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$в точке с абсциссой x_0

2.1$f(x) = x^4 - x^3 + 5x - 2, \quad x_0 = 0$
2.2. $f(x) = x^3 + 3x, \quad x_0 = 2$

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающегося являются:

- ✓ Уровень освоения учебного материала;
- ✓ Умение использовать теоретические знания и практические умения при выполнении профессиональных задач;
- ✓ Уровень сформированности общих и профессиональных компетенций.

Самостоятельная работа №10на тему: Вычисление предела функции

Цель: Знать понятие предела функции в точке, уметь вычислять пределы и раскрывать неопределённости $[\frac{0}{0}]$ и $[\frac{\infty}{\infty}]$.

Теоретический материал

Формулы для повторения

1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где С = const

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при x→a.

2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$
4. $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$
5. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Образец решения:

1. Найти предел:

$$\lim_{x\to 2}(5x^2-2x+1)=5\cdot 2^2-2\cdot 2+1=5\cdot 4-4+1=17.$$

2. Найти предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+5}{x^3+x^2-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть ее, разделим числитель и знаменатель дроби на высшую степень числа х, т.е. на x^3.

Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}}.$$

Применяя теоремы о вычислении предела, получим:

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3}{x^3}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}=\frac{2}{1}=2$$

3. Найти предел:

$$1.\lim_{x\to -2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Решение:

Имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть ее, разложим на множители числитель и знаменатель.

$$\lim_{x\to -2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)}=\lim_{x\to -2}\frac{5x+3}{3x-4}=\frac{7}{10}=0{,}7$$

Примечание:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}$=0;

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0;\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работой, прочитайте ещё раз конспект, учебник и ответьте на следующие вопросы:

1. Что называется пределом?
2. Свойства пределов.
3. Вычисление пределов, стремящихся к числу.
4. Вычисление пределов$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$
5. Вычисление пределов$\left[\frac{0}{0}\right]$

Решить самостоятельно:

Вариант 1 Найти указанные пределы: 1. $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-4x+4)$ 2. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}}{x}$ 3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ 4. $\lim\limits_{x\to -6}\frac{x^2-36}{x+6}$ 5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$	**Вариант 2** Найти указанные пределы: 1. $\lim\limits_{x\to -1}(5-3x-x^2)$ 2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x}{\sqrt{x+6}}$ 3. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-16}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{5x}$ 5. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}$
Вариант 3 Найти указанные пределы: 1. $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+7x-3)$ 2. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}}{2x}$ 3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ 4. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+5x}{x+5}$ 5. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$	**Вариант 4** Найти указанные пределы: 1. $\lim\limits_{x\to -2}(3-4x-x^2)$ 2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x}{\sqrt{2x+14}}$ 3. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ 4. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{4-x}{16-x^2}$ 5. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^3+27}{x+3}$

Дополнительное задание:

1. Найти указанные пределы:

$$1.\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-4}$$

$$2.\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2+2x-15}$$

$$3.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-4}{2x^3-x-1}$$

$$4.\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+7x^3-1}{2x^5+3}$$

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающегося являются:

- ✓ Уровень освоения учебного материала;
- ✓ Умение использовать теоретические знания и практические умения при выполнении профессиональных задач;

- ✓ Уровень сформированности общих и профессиональных компетенций.

Самостоятельная работа №11 на тему: Применение производной к исследованию функции

Цель: Знать условия возрастания, убывания функции, точек максимума и минимума функции. Знать схему исследования функции и применять её при построении графика.

**Теоретический материал**

Признак возрастания функции: Если $f^{/}(x) > 0$ в каждой точке некоторого промежутка, то на этом промежутке функция $f(x)$**возрастает**.

Признак убывания функции: Если $f^{/}(x) < 0$ в каждой точке некоторого промежутка, то на этом промежутке функция $f(x)$**убывает.**

Признак максимума функции: Если функция $f(x)$непрерывна в точке x_0, а $f^{/}(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f^{/}(x) < 0$ на интервале $(x_0\,; a)$, то x_0 является точкой **максимума**.

Упрощённая формулировка: Если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума.

Признак минимума функции: Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $f^{/}(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f^{/}(x) > 0$ на интервале $(x_0\,; a)$, то x_0 является точкой **минимума**

Упрощённая формулировка: Если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 есть точка максимума.

Алгоритм исследования функции и построения графика функции.

При исследовании функции и изучении её свойств с целью построения графика находят:

1) область определения функции *D(f)* и, если возможно, область изменения *E(f);*
2) точки разрыва функции и промежутки непрерывности;
3) точки пересечения графика с осями координат;
4) промежутки знакопостоянства функции;
5) чётность, нечётность, периодичность;
6) критические точки функции, точки экстремума, экстремумы, промежутки монотонности;
7) промежутки выпуклости, вогнутости графика функции, точки перегиба;
8) асимптоты графика функции;

9) дополнительные точки (если это необходимо).

10) строится график функции

Пример.

Исследовать с помощью производной и построить график функции $y = \dfrac{x^2+2x-1}{x}$.

Решение:

1) $D(f) = (-\infty;0)\cup(0;\infty)$
2) *x=0 – точка разрыва II-го рода (x=0 – уравнение вертикальной асимптоты).*
3) *при* $y=0,\quad x=-1\pm\sqrt{2}$.
4)

$$\underset{-1-\sqrt{2}}{\circ}\quad \underset{0}{\circ}\quad \underset{-1+\sqrt{2}}{\circ}\qquad - \quad + \quad - \quad +$$

$y>0$ *при* $\dfrac{x^2+2x-1}{x}>0 \Rightarrow x\in\left(-1-\sqrt{2};0\right);\left(-1+\sqrt{2};+\infty\right);$

$y<0$ *при* $\dfrac{x^2+2x-1}{x}<0 \Rightarrow x\in\left(-\infty;-1-\sqrt{2}\right);\left(0;-1+\sqrt{2}\right).$

5) *Функция ни чётная, ни нечётная, т.е. общего вида и непериодическая.*
6) *Находим производную:* $y' = \dfrac{(2x+2)\cdot x-\left(x^2+2x-1\right)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{x^2+1}{x^2}>0$

при всех $x\in D(f)$. *Следовательно, всюду в* $D(f)$ *функция возрастает.*

Функция не имеет точек экстремума и экстремумов.

7) $y'' = \left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)' = -\dfrac{2}{x^3};$

   a) *при* $x<0$ $\;y''>0$, *следовательно, при* $x\in(-\infty;0)$ *график вогнутый;*

   b) *при* $x>0$ $\;y''<0$, *следовательно, при* $x\in(0;+\infty)$ *график выпуклый.*

8) a) *прямая* $x=0$ *(ось Oy) – вертикальная асимптота;*

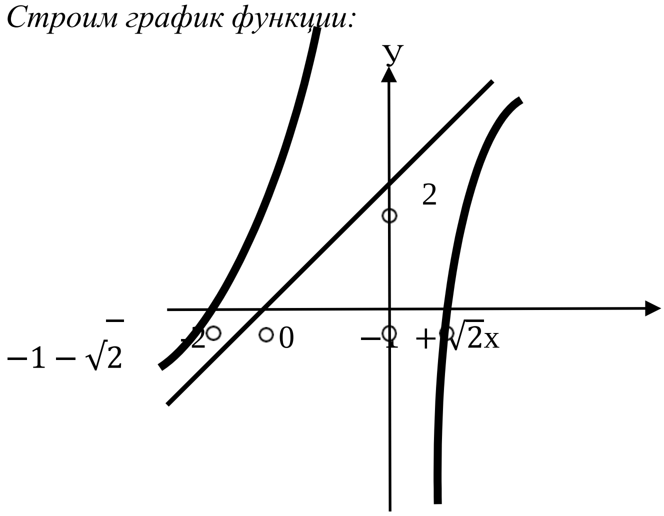
b) *пусть наклонная асимптота имеет вид* $y=kx+b$, *тогда*

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x^2}-x\right)=2;$$

$y=x+2$ *- уравнение наклонной асимптоты.*

Строим график функции:



Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работой, прочитайте ещё раз конспект, учебник и ответьте на следующие вопросы:

1. Алгоритм исследования функции и построения графика функции.


Решить самостоятельно:

Вариант 1

I. Найти критические точки и промежутки возрастания и убывания
1. $f(x)=2x^2-1$
2. $f(x)=-x^2+2x$
3. $f(x)=x^3+2x^2$
4. $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$

II. Найти экстремум функции
1. $f(x)=3x^2-2x$
2. $f(x)=cos2x$

III. Исследовать функцию и построить график
$f(x)=x^3-3x^2+2$

Вариант 2

I. Найти критические точки и промежутки возрастания и убывания
1. $f(x)=-x^2+1$
2. $f(x)=x^2-4x$

3. $f(x) = x^3 + 3x^2$
4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

II. Найти экстремум функции

1. $f(x) = 3x - 5x^2$
2. $f(x) = sin3x$

III. Исследовать функцию и построить график

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающегося являются:

- ✓ Уровень освоения учебного материала;
- ✓ Умение использовать теоретические знания и практические умения при выполнении профессиональных задач;
- ✓ Уровень сформированности общих и профессиональных компетенций.

Самостоятельная работа№12по теме Наибольшее и наименьшее значения функции.

Цель: научиться вычислять наибольшее и наименьшее значения функции и уметь применять полученные навыки при решении практических задач.

Теоретический материал

Наибольшее *и* ***наименьшее значения функции*** - *самое большое или самое малое значение функции по сравнению со всеми возможными (в отличие от экстремумов, где сравнение ведётся только с близкими точками).*

Ход работы.

При вычислении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке находят:

1. Производную$f^1(x)$;
2. критические точки;
3. значения функции в критических точках и на концах отрезка;
4. наибольшее и наименьшее значения функции.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ на отрезке [1; 3].

Решение:

1) Функция$f(x)$ непрерывна на отрезке [1; 3].
2) Находим $f'(x) = 3x^2 - 6x$.
3) $f'(x) = 0$, $3x^2 - 6x = 0$, $3x(x - 2) = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Критические точки $x = 0$, $x = 2$.
4) Отрезку [1;3] принадлежит лишь одна из этих критических точек, а именно $x = 2$. Вычислим значения функции $f(x)$ в точке $x = 2$ и на концах отрезка $x = 1$ и $x = 3$.

f (2) = 2^3 - 3· 2^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0;
f (1) = 1^3 - 3· 1^2 + 4 = 1 - 3 + 4 = 2;
f (3) = 3^3 - 3· 3^2 + 4 = 27 - 27 + 4 = 4.

4) Таким образом, наибольшее значение функции равно 4 и оно достигается на правой границе отрезка в точке $x = 3$; наименьшее значение функции равно 0 и достигается ею во внутренней точке $x=2$.

Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работой, прочитайте ещё раз конспект, учебник и ответьте на следующие вопросы:

1. **Что называется наименьшим и наибольшим значением функции?**
2. **Правила нахождения производной.**
3. **Что называется критическими точками функции и как они находятся?**
4. **Алгоритм нахождения наименьшего и наименьшего значений функции на данном отрезке.**

Задания для самостоятельной работы

1. Найти наибольшее и наименьшее значения следующих функций:

	1	**2**	**3**
1	$y = 2x^2 - 8x + 1$ на отрезке [0; 3]	$y = x^5 - 5x^3 - 8$ на отрезке [0; 2]	$y = 2x^3 - 3x^2\ 12x+1$ на отрезке [4; 5]
2	$y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 3$ на отрезке [2; 3]	$y=2x^3+3x^2 - 12x - 1$ на отрезке [-1; 2]	$y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 2$ на отрезке [-2; 2]
3	$y = 2x^3 + 3x^2 + 2$ на отрезке [-2; 1]	$y = -x^3 + 3x^2 + 4$ на отрезке [-3; 3]	$y = 2x^3 - 9x^2 - 3$ на отрезке [-1; 4]
4	$y = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$ на отрезке [-4; 4]	$y = 2x^3 + 3x^2$ на отрезке [-1; 1]	$y = x^3 - 6x^2 + 1$ на отрезке [-1; 2]

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы студента являются:

- ✓ Уровень освоения учебного материала;
- ✓ Умение использовать теоретические знания и практические умения при выполнении профессиональных задач;
- ✓ Уровень сформированности общих и профессиональных компетенции

Тема: «Комбинаторика»

Самостоятельная работа № 13 на тему: «Операции над множествами »

Цель:Научиться выполнять операции над множествами**.**

Теоретический материал 

Множеством называют совокупность объектов, объединенных по определенному признаку. Множество состоит из элементов (множество студентов колледжа, рациональных чисел). Множества обозначаются заглавными буквами латинского алфавита A, B, C … Элементы множества обозначаются малыми латинскими буквами *a, b*, c, … ,y.

Пример 1. Если N – множество натуральных чисел, то $2 \in N$, $10 \in$ N, но $-5 \notin$ N.

Пример 2. Пусть А – множество всех стран Европы, тогда Англия $\in$ А, в то время как Индия $\notin$ А.

Объединением множеств A_1 и A_2 называют множество B, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A_1 ,A_2 .

Пересечением множеств A_1 и A_2 называют множество B, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат и множеству A_1 и множествуA_2 одновременно.

Разностью множеств A_1 и A_2 называют множество B, состоящее только из тех элементов множества A_1 , которые не содержатся в множестве A_2.

Дополнением (до U) множества A называется множество $\bar{A}$ всех элементов, не принадлежащих A, но принадлежащих универсальному множеству U.

 **<u>Задания для самостоятельной работы</u>**

1. Запишите множество А, элементы которого суть делители числа 24.
2. Найдите множество целых корней уравнения $9x^2 – 1 = 0$.
3. Найдите пересечение множеств A = {0, 1, 2,3}, B = { -1,2, 3, 4, 5, 6}.
4. Пусть X – это множество государственных предприятий с годовым оборотом *b* не ниже a. Пусть Y – это множество предприятий с годовым оборотом b не выше c. (Пусть, $a < c$). Определить пересечение множеств $X \cap Y$.
5. Найдите разность множеств A = { 2n – 1, n $\in$ N} и B = {4m + 1, m $\in$ N}.
6. Даны множества A_1 = {*a, b,* c}; A_2 = {c, d, e, *f}*; U = { *a, b*, c, d, e,*f* }. Осуществите над множествами операции а)объединения, б)пересечения, в)разности, г)дополнения.

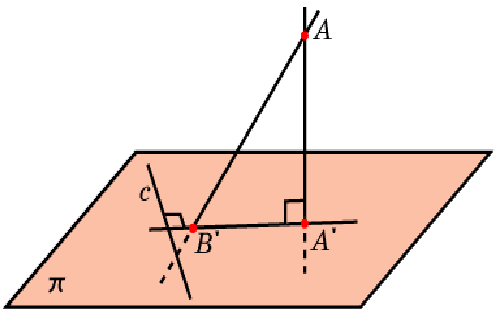
Самостоятельная работа №14написать сообщениена тему: «Практическое применение комбинаторных задач»

Цель: привить студентам навыки самостоятельного исследования и умение творчески выполнять работу.

(рекомендации см. в приложении)

Самостоятельная работа № 15 на тему: Теорема о трех перпендикулярах
Цель: уметь применять теорему о трех перпендикулярах при решении задач**.**

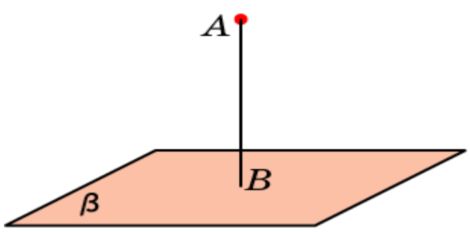
Теоретический материал 



Теорема:Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Теорема (обратная): Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.

Определение: Расстоянием от точки до плоскости в пространстве называется длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость



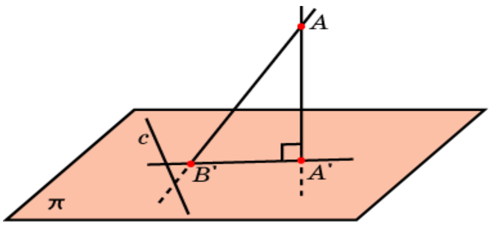
Вопросы для закрепления.

1. Как найти расстояние от точки до плоскости?

2. Может ли наклонная быть короче перпендикуляра, проведённого из той же точки к той же плоскости?
3. Если наклонные, проведённые из одной точки к плоскости, равны, то, что можно сказать об их проекциях?
4. Как формулируется обратное утверждение? Справедливо ли оно?
5. Сформулируйте теорему о трёх перпендикулярах
6. Как формулируется теорема, обратная теореме о трёх перпендикулярах?
7. Если точка равноудалена от всех вершин многоугольника, то во что она проектируется?
8. Если точка равноудалена от всех сторон многоугольника, то во что она проектируется?
9. Что называется углом между прямой и плоскостью?

Решить самостоятельно.
Вариант 1

1. Докажите, что если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и ортогональной проекции этой наклонной.



2. Из точки к плоскости проведены две наклонные, одна из которых на 6 см длиннее второй. Проекция наклонных равны 17 см и 7 см. Найдите наклонные.

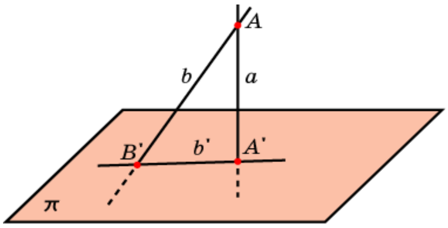
3. Из вершины равностороннего треугольника ABC восстановлен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Чему равно расстояние от точки D до прямой BC, если AD=1дм, BC=8 дм?

4. Диагонали квадрата ABCD пересекаются в точке O. SO – перпендикуляр к плоскости квадрата. SO= $4\sqrt{2}$ см.
1) Докажите равенство углов, образованных прямыми SA, SB, SD с плоскостью квадрата.
2) Найдите эти углы, если периметр ABCD равен 32 см.

5. Отрезок SA длиной 15 см – перпендикуляр к плоскости прямоугольника ABCD, в котором AC=10 см, AB=6 см.
Докажите, что проекции треугольников SBC и SDC имеют равные площади.

Вариант 2

1. Докажите, чтоперпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, короче всякой наклонной, проведенной из той же точки к той же плоскости.



2. Из точки к плоскости проведены две наклонные, равные 17 см и 15 см. Проекция одной из них на 4 см больше проекции другой. Найдите проекции наклонных.

3. Из вершины квадрата ABCD восстановлен перпендикуляр AE к плоскости квадрата. Чему равно расстояние от точки E до прямой BD, если AE=2дм, AB=8 дм?

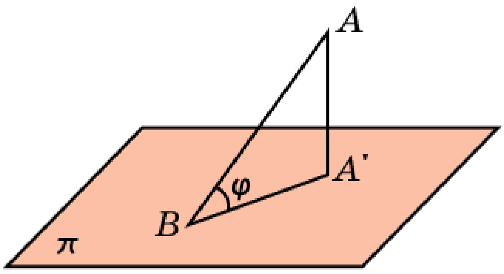
4. Диагонали квадрата ABCD пересекаются в точке O. SO – перпендикуляр к плоскости квадрата. SO= 4см. Точки K, L, M, N – середины сторон квадрата.
1) Докажите равенство углов, образованных прямыми SK, SL, SM, SN с плоскостью квадрата.
2) Найдите эти углы, если площадь ABCD равен 64 см^2.

5. Отрезок SA длиной 6 см – перпендикуляр к плоскости квадрата ABCD, в котором AC=$8\sqrt{2}$см.
Докажите, что проекции треугольников SBC и SDC на плоскости квадрата равны.

Самостоятельная работа №16 на тему: Угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями

Цель: Уметь находить угол между прямой и плоскостью и угол между плоскостями.

Теоретические сведения
Угол между прямой и плоскостью.
Углом между наклонной и плоскостью называется угол между этой наклонной и ее ортогональной проекцией на данную плоскость.
Считают также, что прямая, перпендикулярная плоскости, образует с этой плоскостью прямой угол.



Определим понятие угла между плоскостями.

Определение: Угол между параллельными плоскостями считается равным нулю.

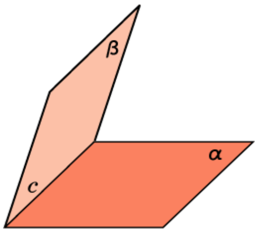


Рис. 1

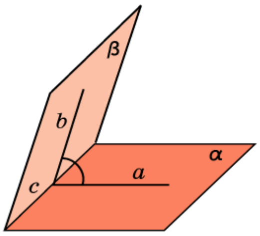


Рис. 2

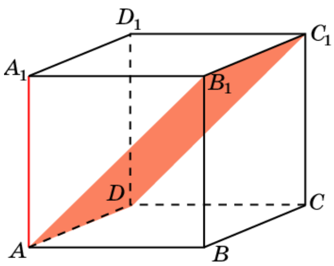
Пусть данные плоскости пересекаются. Проведем плоскость, перпендикулярную прямой их пересечения. Она пересекает данные плоскости по двум прямым. Угол между этими прямыми называется углом между данными плоскостями .

Заметим, что при пересечении двух плоскостей вообще-то образуются четыре угла. В качестве угла между плоскостями мы берем острый угол.

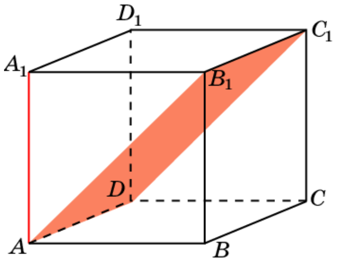
Решить самостоятельно. Ответы обосновать. 

Вариант 1

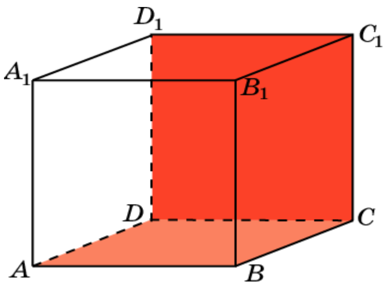
1. Из вершины *A* квадрата *ABCD* перпендикулярно его плоскости проведен отрезок *AK*, равный 3. Из точки *K* опущены перпендикуляры на стороны *BC* и *CD*. Перпендикуляр из точки *K* к стороне *BC* равен 6. Найдите углы, которые образуют эти перпендикуляры с плоскостью квадрата.
2. В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1.



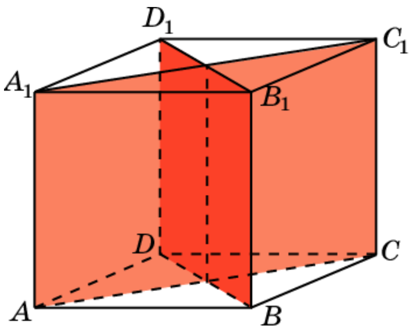
3. В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между плоскостями *ABC* и CDD_1.
4. Из вершины *A* квадрата *ABCD* перпендикулярно его плоскости проведен отрезок *AK*, равный 3. Из точки *K* опущены перпендикуляры на стороны *BC* и *CD*. Перпендикуляр из точки *K* к стороне *BC* равен 6. Найдите углы, которые образуют эти перпендикуляры с плоскостью квадрата.
5. В кубе $A \ldots D_1$ найдите угол между прямой AA_1 и плоскостью AB_1C_1.



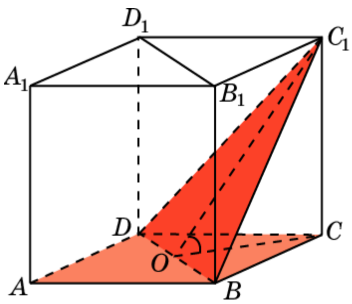
6. В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDD_1.



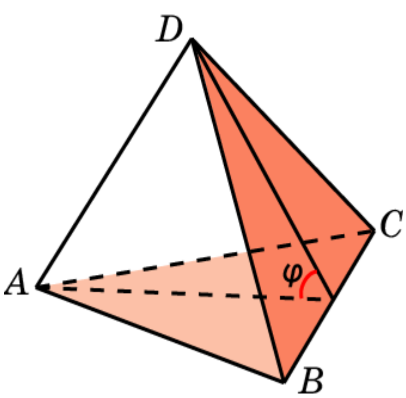
7. В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ACC_1 и BDD_1.



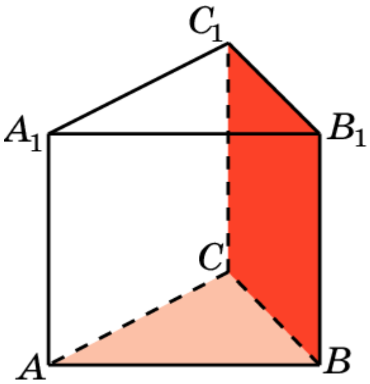
8. В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и BC_1D.



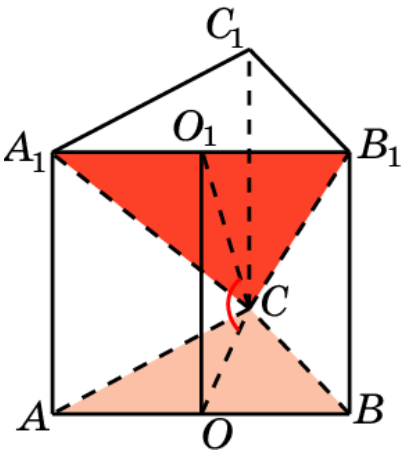
9. В тетраэдре $ABCD$, ребра которого равны 1,найдите угол между плоскостями ABC и BCD.



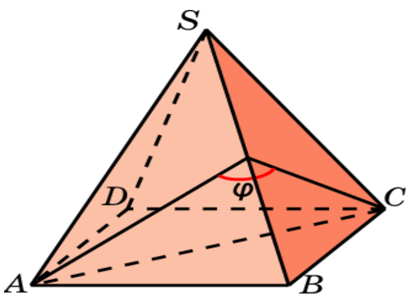
10. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и BB_1C_1.



11. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и A_1B_1C.

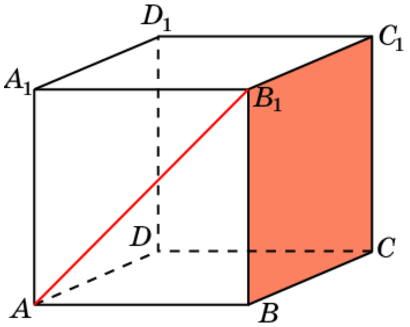


12. В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите двугранный угол, образованный гранями SABи SBC.

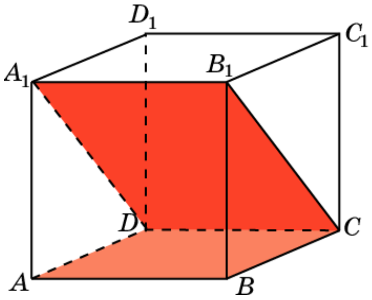


Вариант 2

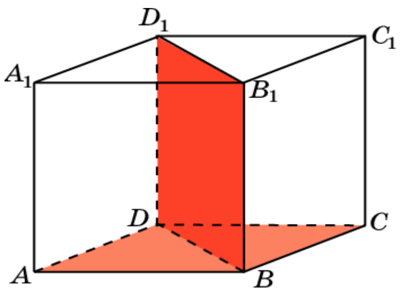
1. Из вершины A квадрата $ABCD$ перпендикулярно его плоскости проведен отрезок AK, равный 6. Из точки K опущены перпендикуляры на стороны BC и CD. Перпендикуляр из точки K к стороне BC равен 18. Найдите углы, которые образуют эти перпендикуляры с плоскостью квадрата.
2. В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BCC_1.



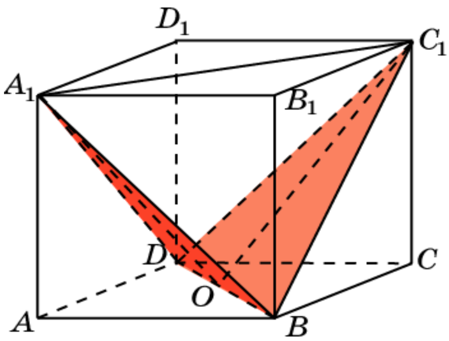
3. В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и CDA_1.



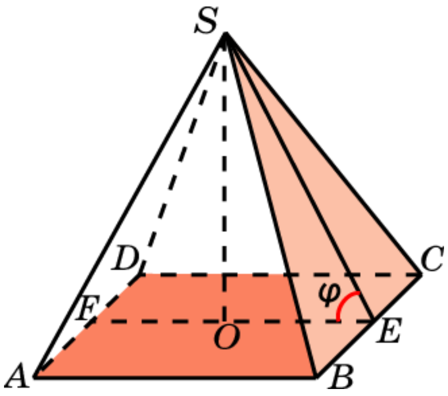
4. В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между плоскостями ABC и BDD_1.



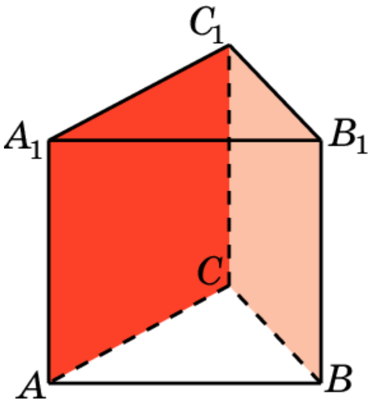
5. В кубе $A\ldots D_1$ найдите угол между плоскостями BC_1D и BA_1D.



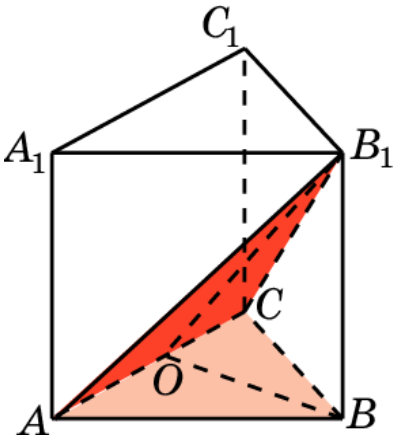
6. В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями SBCи ABC.



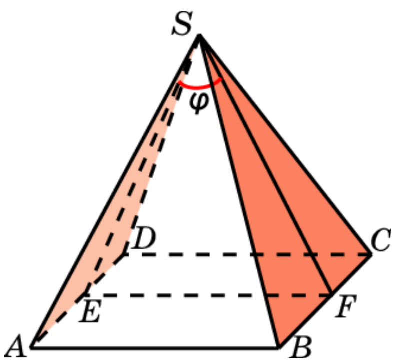
7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACC_1 и BCC_1.



8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ABC и ACB_1.



9. В правильной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями SADи SBC.



Самостоятельная работа №17 . Составление кроссвордов на тему: «Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве»

Цель: развитие интереса к предмету, интуиции, логического мышления.

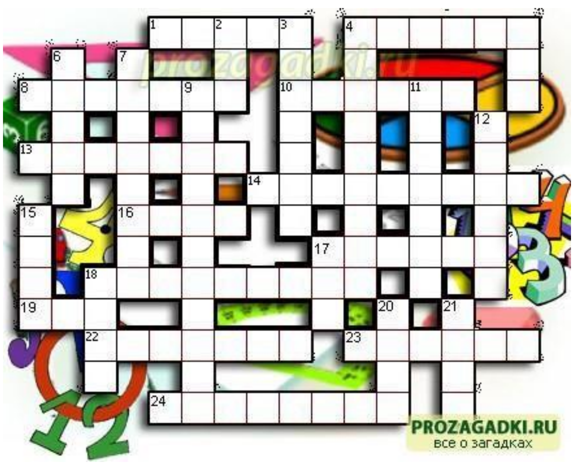
Кроссворд — игра, состоящая в разгадывании слов по определениям.

Правила составления кроссвордов

- В общем случае определение должно состоять из одного предложения.
- Определения должны быть по во возможности краткими. Следует избегать перечислений, не злоупотреблять причастными и деепричастными оборотами, не перегружать текст прилагательными. Определение кроссворда - своего рода компромисс между краткостью и содержательностью.
- Запрещается использование в одной сетке двух и более одинаковых слов, даже с различными определениями.
- В вопросах следует избегать энциклопедических определений. В целом работа должна быть авторской, а не перепечаткой статей из словаря.
- Нежелательно начинать формулировку вопроса с цифры, глагола, деепричастия.
- Запрещается использование однокоренных слов в вопросах и ответах.
- В работе должна быть изюминка, то есть нечто, отличающее ее от миллионов других.
- Запрещается помещать слова без пересечений (встречается и такое).
- Не используются слова, пишущиеся через тире и имеющие уменьшительно-ласкательную окраску.

Образец оформления и составления кроссвордов:

По горизонтали:



1. Сторона прямоугольного треугольника.
4. Он есть у функции и последовательности.
8. Его штаны равны во все стороны.
10. Полный круг вращения.
13. Французский математик, специалист теории вероятностей.
14. Арифметическое действие.
16. Гектар — ... площади.
17. Часть матрицы.
18. Свойство углов.
19. Полупрямая.
22. Нейтральный элемент относительно умножения.

23. Группа повторяющихся цифр в бесконечной десятичной дроби.
24. Наибольший общий ...

По вертикали:

2. Бублик как математический объект.
3. Положение, нуждающееся в доказательстве.
4. Поверхность, имеющая 2 измерения.
5. Линейное алгебраическое уравнение.
6. Тригонометрическая функция.
7. Один из двух экстремумов.
9. Функция по своей сути.
11. Часть прямой.
12. Линия.
15. Геометрическая фигура, образованная двумя лучами.
17. Полный квадрат первого двузначного числа.
18. Для него необходимы натуральные числа.
20. В теории графов: маршрут, все ребра которого различны.
21. В теории графов: замкнутый маршрут, все ребра которого различны.

Ответы:

По горизонтали:
1-катет;
4-предел;
8-пифагор;
10-оборот;
13-пуассон;
14-умножение;
16-мера;
17- строка;
18- смежность;
19-луч;
22-единица;
23-период;
24-делитель;

По вертикали:
2-тор;
3-теорема;
4-плоскость;
5-лау;
8-синус;
7-максимум;
9-отображение;
11-отрезок;
12-кривая;
15-угол;
17-сто;
18-счёт;
20-цепь;
21-цикл.

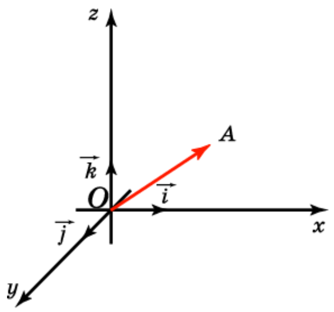
Тема: Векторы и координаты.

Самостоятельная работа №18 на тему: Действие над векторами в координатной форме

Цель: Знать правила действия над векторами и уметь их применять при вычислениях.

Теоретический материал 

Отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются координатами вектора. Обозначим $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторы с координатами (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы, отложенными от начала координат и называть их координатными векторами.



Теорема.Вектор $a^{\rightarrow}$ имеет координаты (x, y, z) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$/

Вариант 1 

№п/п	Название операции	Формулы
1	Найти сумму векторов	$\vec{a}\{1; -2; 3\}, \quad \vec{b}\{4; 0; -1\}$ $\vec{a} + \vec{b}\{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$
2	Найти разность векторов	$\vec{a}\{4; 1; -3\}, \quad \vec{b}\{0; -5; 2\}$ $\vec{a} - \vec{b}\{x_1 - x_2;\ y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$
3	Найти произведение вектора на число	$\vec{a}\{-1; 3; 1\},\ \delta - число \delta = -3$ $\delta\vec{a}\{\delta \cdot x;\ \delta y\ ; \delta z\}$
4	Вычислить координаты середины отрезка	Точка А$(1; 2; -3)$ Точка В (-3;4;-1) Точка С-середина отрезка АВ. С$(x_c;y_c;z_c)$ $x_c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_c = \dfrac{y_1 + y_2}{2},$

		$z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}$
5	Найти координаты вектора	Точка А$(5; 0; -3)$. Точка В (-1;4;-7).Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Из координат конца вычислить координаты начала вектора $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$
6	Найти длину вектора	$\vec{a}\{5; 1; -1\}$ $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
7	Вычислить скалярное произведение векторов	$\vec{a}\{-2; 3; 7\}, \quad \vec{b}\{-9; 0; 2\}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$
8	Найти косинус угла между векторами	$\vec{a}\{2; 0; 1\}, \quad \vec{b}\{-3; 1; 2\}$ $\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$
9	При каких значениях m и n векторы коллинеарны?	$\vec{a}\{m; 3; 1\}, \quad \vec{b}\{1; n; 2\}$ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$
10	Проверьте перпендикулярность векторов	$\vec{a}\{-4; 0; 1\}, \quad \vec{b}\{2; 7; 8\}$ $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$ - условие перпендикулярности векторов

Вариант 2

№п/п	Название операции	Формулы
1		$\vec{a}\{2; -3; 4\}, \quad \vec{b}\{-1; 2; 0\}$

	Найти сумму векторов	$\vec{a}+\vec{b}\{x_1+x_2;\ y_1+y_2; z_1+z_2\}$
2	Найти разность векторов	$\vec{a}\{4;-5;7\},\quad \vec{b}\{3;-1;2\}$ $\vec{a}-\vec{b}\{x_1-x_2;\ y_1-y_2; z_1-z_2\}$
3	Найти пароизведение на число	$\vec{a}\{-2;4;0\},\ \delta - число \delta=-4$ $\delta\vec{a}\{\delta\cdot x;\ \delta y\ ;\delta z\}$
4	Вычислить координаты середины отрезка	Точка А$(-3:1;2)$ Точка В (2;-3;1) Точка С-середина отрезка АВ. С$(x_c;y_c;z_c)$ $x_c=\dfrac{x_1+x_2}{2},\quad y_c=\dfrac{y_1+y_2}{2},$ $z_c=\dfrac{z_1+z_2}{2}$
5	Найти координаты вектора	Точка А$(6;-3;4)$. Точка В (1;-4;7). Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Из координат конца вычислить координаты начала вектора $\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\}$
6	Найти длину вектора	$\vec{a}\{7;2;-1\}$ $\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
7	Вычислить скалярное произведение векторов	$\vec{a}\{-3;2;9\},\quad \vec{b}\{-7;0;3\}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$
8	Найти косинус угла между векторами	$\vec{a}\{4;1;0\},\quad \vec{b}\{-5;3;1\}$ $\cos\alpha=\dfrac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

9	При каких значениях m и n векторы коллинеарны?	$\vec{a}\{m; 5; 3\}, \quad \vec{b}\{2; n; 4\}$
		$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$
10	Проверьте перпендикулярность векторов	$\vec{a}\{0; -3; 2\}, \quad \vec{b}\{9; 4; 6\}$
		$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$ - условие перпендикулярности векторов

Самостоятельная работа № 19 приготовить сообщение на тему: «Жизнь и деятельность математиков-ученых»

Цель: расширить кругозор учащихся, познакомить с жизнью и деятельностью математиков – ученых.

Задание для студентов. Написать сообщение на заданную тему.

Сообщение – это сокращенная запись информации, в которой должны быть отражены основные положения текста, сопровождающиеся аргументами, 1–2 самыми яркими и в то же время краткими примерами.

Сообщение составляется по нескольким источникам, связанным между собой одной темой. Вначале изучается тот источник, в котором данная тема изложена наиболее полно и на современном уровне научных и практических достижений. Записанное сообщение дополняется материалом других источников.

Этапы подготовки сообщения:

1. Прочитайте текст.
2. Составьте его развернутый план.
3. Подумайте, какие части можно сократить так, чтобы содержание было понято правильно и, главное, не исчезло.
4. Объедините близкие по смыслу части.
5. В каждой части выделите главное и второстепенное, которое может быть сокращено при конспектировании.
6. При записи старайтесь сложные предложения заменить простыми.

Тематическое и смысловое единство сообщения выражается в том, что все его компоненты связаны с темой первоисточника.

Сообщение должно содержать информацию на 3-5 мин. и сопровождаться презентацией, схемами, рисунками, таблицами и т.д.

 **Выполнить самостоятельно:**

Написать сообщение на тему: «Математики - известные ученые» (на выбор).

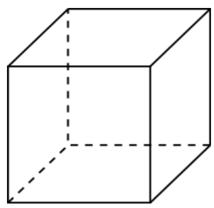
1. Николай Лобачевский;
2. Софья Ковалевская;
3. Николай Боголюбов;
4. Григорий Перельман;
5. Пафнутий Чебышев;
6. Виктор Садовничий;
7. Леонтий Магницкий;
8. Владимир Брадис;
9. Константин Поссе;
10. Андрей Колмогоров;
11. Рене Декарт;
12. Эварист Галуа;
13. Карл Вейерштрасс;
14. Пьер Ферма;
15. Джон Нейман;
16. Жан Даламбер;
17. Клаус Мёбиус;
18. Евклид;
19. Пифогор;
20. Го́тфрид Ви́льгельм Ле́йбниц.

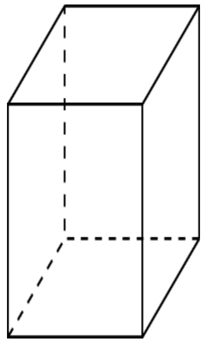
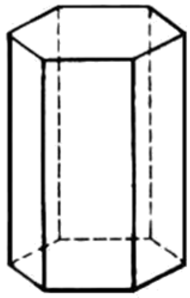
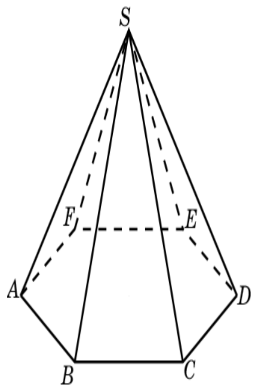
Тема: Геометрические тела. Объемы и площади поверхностей геометрических тел
Самостоятельная работа №20на тему: Многогранники и их поверхности
Цель: Знать формулы вычисления площади боковой и полной поверхности призмы, пирамиды, параллелепипеда и уметь применять их к решению задач.

Теоретический материал 

Площадью поверхности многогранника по определению считается сумма площадей, входящих в эту поверхность многоугольников.

Основные формулы

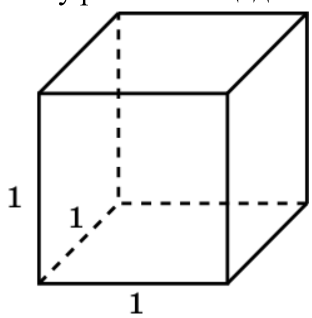
№п/п	**Наименование многогранника**	**Изображение**	**Площадь боковой и полной поверхности**
1	**Куб**		$S_{п} = 6a^{2}$

2	**Прямоугольный параллелепипед**		$S_п = 2ab + 2ac + 2ac$
3	**Призма**		$S_б = p \cdot H$ $S_п = S_б + 2S_о$
4	**Пирамида**		$S_б = \frac{1}{2} p \cdot h$ $S_п = S_б + S_о$

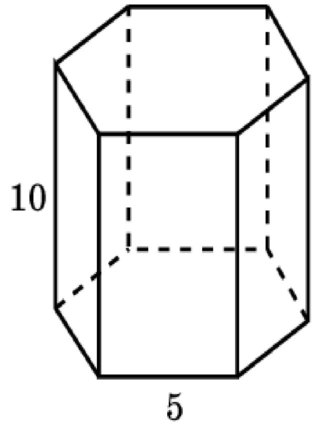
Решить самостоятельно. 

Вариант 1

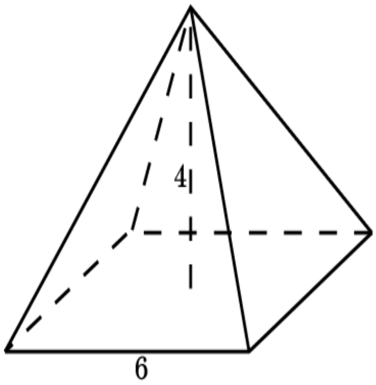
1. Чему равна площадь поверхности куба с ребром 1?



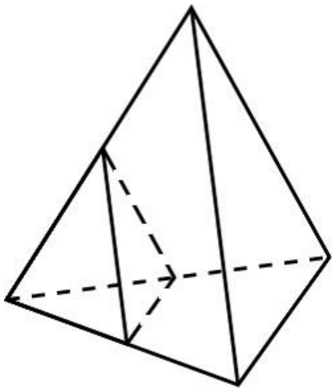
2. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5 см, а высота 10 см.



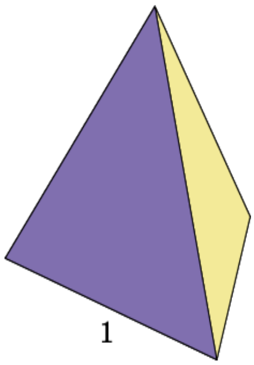
3. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см и высота 4 см.



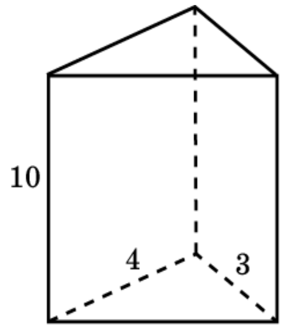
4. Как изменятся площади боковой и полной поверхностей пирамиды, если все её рёбра: а) увеличить в 2 раза; б) уменьшить в 5 раз?



5. Чему равна площадь поверхности правильного тетраэдра с ребром 1?

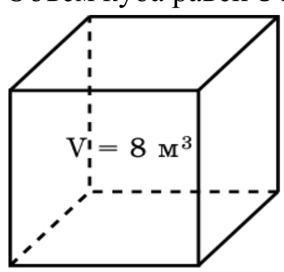


6. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите площадь поверхности данной призмы.

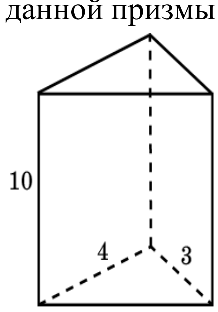


Вариант 2

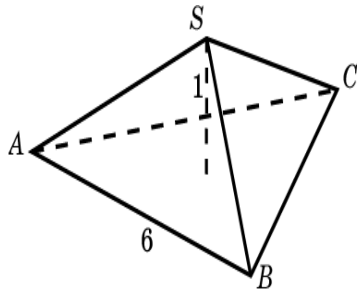
1. Объем куба равен 8 м^3. Найдите площадь его поверхности.



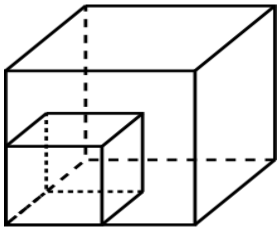
2. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите площадь поверхности данной призмы.



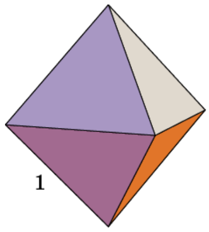
3. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды со стороной основания 6 см и высотой 1 см.



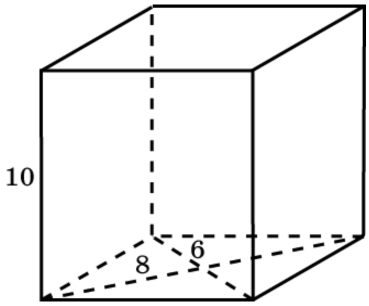
4. Как изменится площадь поверхности куба, если каждое его ребро увеличить в: а) 2 раза; б) 3 раза; в) *n* раз?



5. Чему равна площадь поверхности октаэдра с ребром 1?



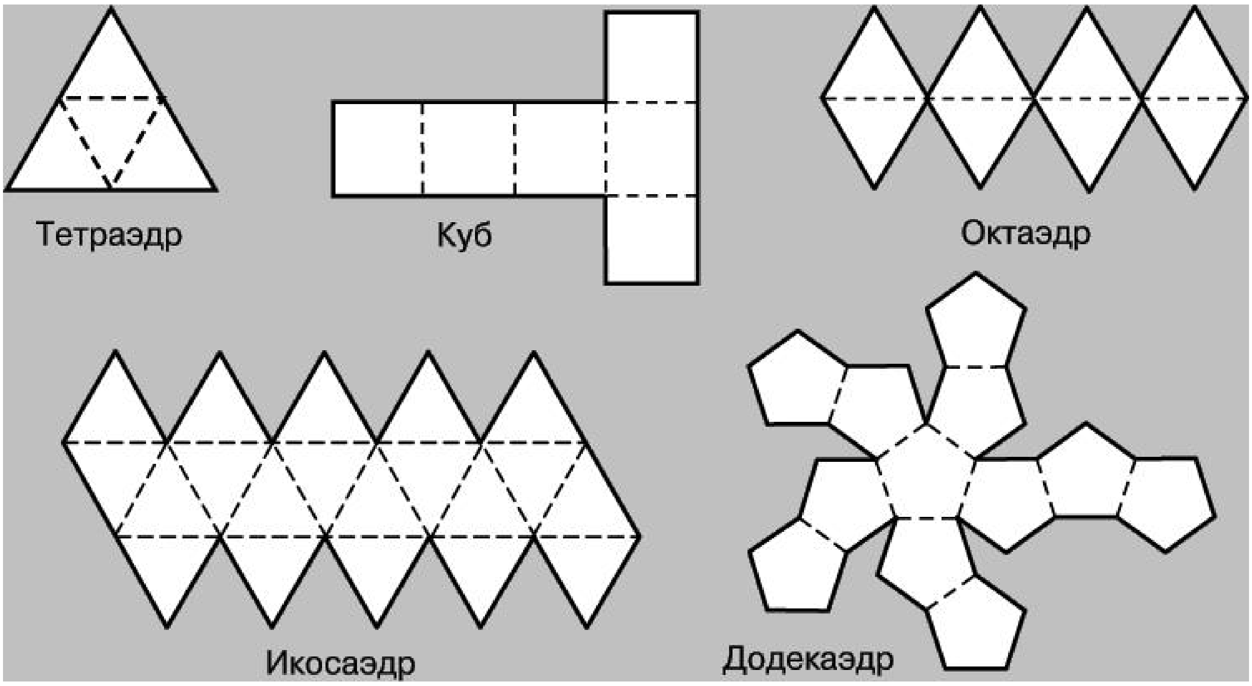
6. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями 6 см и 8 см и боковым ребром 10 см.



Самостоятельная работа №21 на тему: Выполнение моделей многогранников
Цель: Закрепить понятие правильных многогранников, при изготовлении моделей, используя развертки.

Одним из способов изготовления правильных многогранников является способ с использованием, так называемых, развёрток.

Если модель поверхности многогранника изготовлена из гибкого нерастяжимого материала (бумаги, тонкого картона и т. п.), то эту модель можно разрезать по нескольким рёбрам и развернуть так, что она превратится в модель некоторого многоугольника. Этот многоугольник называют развёрткой поверхности многогранника. Для получения модели многогранника удобно сначала изготовить развёртку его поверхности. При этом необходимыми инструментами являются клей и ножницы. Модели многогранников можно сделать, пользуясь одной разверткой, на которой будут расположены все грани. Однако в этом случае все грани будут одного цвета.



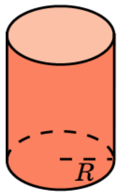
Самостоятельная работа №22 на тему: Площади поверхности и объем фигур вращения

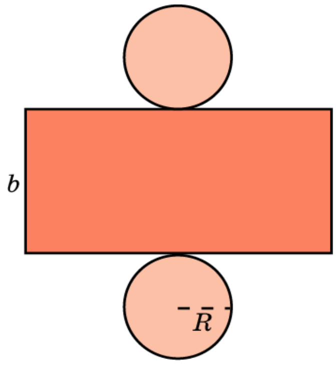
Цель: Знать формулы для вычисления площадей поверхности фигур вращения и уметь применять их при решении задач.

Теоретический материал 

№п/п	Наименование фигуры	Изображение	Формула площадей полной и боковой поверхности

1 **Цилиндр**





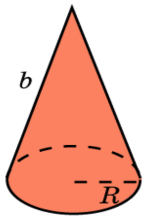
$\boldsymbol{S_б = 2\pi RH}$

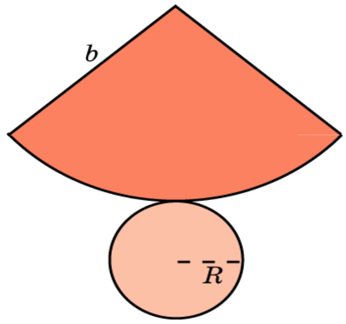
$\boldsymbol{S_п = 2\pi RH + 2\pi R^2}$

$\boldsymbol{S_o = \pi R^2}$

$\boldsymbol{V = \pi R^2 \cdot H}$

2 **Конус**





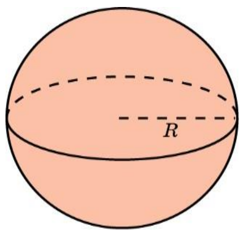
$\boldsymbol{S_б = \pi Rl}$

$\boldsymbol{S_п = \pi Rl + \pi R^2}$

$\boldsymbol{S_o = \pi R^2}$

$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H}$

3 **Сфера, шар**



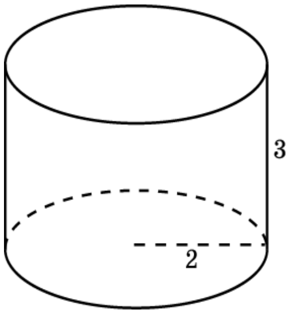
$\boldsymbol{S_п = 4\pi R^2}$

$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

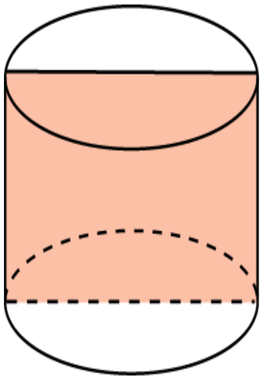
Решить самостоятельно:

Вариант 1

1. Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота - 3 м. Найдите площадь боковой поверхности и объем цилиндра.

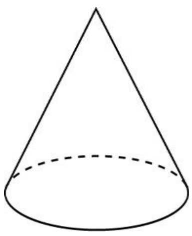


2. Площадь осевого сечения цилиндра равна 4 м^2. Найдите площадь боковой поверхности и объем цилиндра.

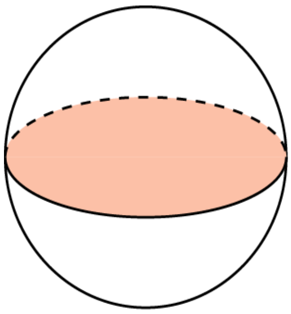


3. Два цилиндра образованы вращением одного и того же прямоугольника вокруг его неравных сторон. Равны ли у этих цилиндров площади: а) боковых; б) полных поверхностей?; в)объемы?

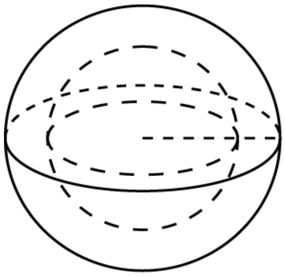
4. Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания.



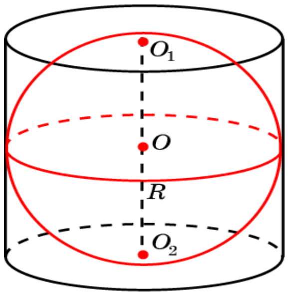
5. Площадь большого круга шара равна 3 см^2. Найдите площадь поверхности и объем шара.



6. Площади поверхностей двух шаров относятся как 4 : 9. Найдите отношение их диаметров.



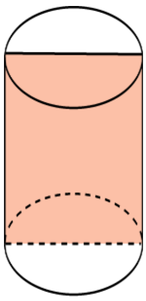
7. Около шара описан цилиндр. Найдите отношение их площадей поверхностей и объемов.



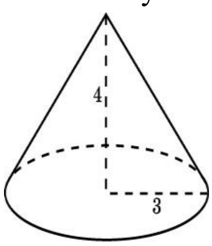
8. Прямоугольник вращается вокруг одной из сторон, равной 5см. Площадь боковой поверхности цилиндра, полученного при вращении, равна 100π см^2. Найдите площадь прямоугольника.

Вариант 2

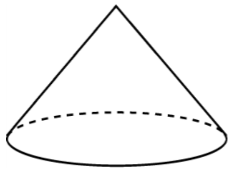
1. Осевое сечение цилиндра - квадрат. Площадь основания равна 1. Найдите площадь поверхности и объем цилиндра.



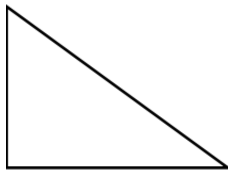
2. Радиус основания конуса равен 3 м, высота - 4 м. Найдите площадь поверхности и объем конуса.



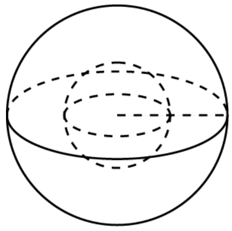
3. Образующая конуса равна 4 дм, а угол при вершине осевого сечения равен 90^o. Вычислите площадь боковой поверхности и объем конуса.



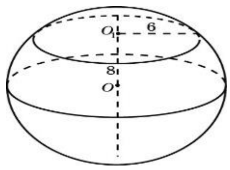
4. Два конуса образованы вращением одного и того же прямоугольного треугольника вокруг его неравных катетов. Равны ли у этих конусов площади: а) боковых; б) полных поверхностей? в)объемы?



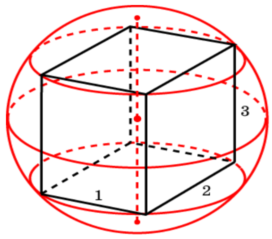
5. Как изменится площадь поверхности и объем шара, если увеличить радиус шара в: а) 2 раза; б) 3 раза; в) n раз?



6. Сечение шара плоскостью, отстоящей от центра шара на расстоянии 8 см, имеет радиус 6 см. Найдите площадь поверхности и объем шара.



7. Около прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 1 дм, 2 дм и 3 дм, описан шар. Найдите площадь его поверхности.



8. Прямоугольник, одна из сторон которого равна 5см, вращается вокруг неизвестной стороны. Площадь боковой поверхности цилиндра, полученного при вращении, равна 60π см^2. Найдите площадь прямоугольника.

Тема: «Многочлены»

Самостоятельная работа № 23 составить кроссворд по теме «Многочлены»

Цель: развитие интереса к предмету, интуиции, логического мышления.

Кроссворд — игра, состоящая в разгадывании слов по определениям.

Правила составления кроссвордов

- В общем случае определение должно состоять из одного предложения.
- Определения должны быть по во возможности краткими. Следует избегать перечислений, не злоупотреблять причастными и деепричастными оборотами, не перегружать текст прилагательными. Определение кроссворда - своего рода компромисс между краткостью и содержательностью.
- Запрещается использование в одной сетке двух и более одинаковых слов, даже с различными определениями.
- В вопросах следует избегать энциклопедических определений. В целом работа должна быть авторской, а не перепечаткой статей из словаря.
- Нежелательно начинать формулировку вопроса с цифры, глагола, деепричастия.
- Запрещается использование однокоренных слов в вопросах и ответах.
- В работе должна быть изюминка, то есть нечто, отличающее ее от миллионов других.
- Запрещается помещать слова без пересечений (встречается и такое).
- Не используются слова, пишущиеся через тире и имеющие уменьшительно-ласкательную окраску.

(образец смотри в приложении)

Тема: Степенная, показательная, логарифмическая функции:

Самостоятельная работа №23 «Преобразование выражений, содержащих радикалы»
Цель :1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Преобразование выражений, содержащих радикалы».

2.Закрепить и систематизировать знания по теме.

3.Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

Перед выполнение работы, ответьте на вопросы:

1. Ответить на контрольные вопросы:
   а) Дайте определение корня n-ой степени. Что такое арифметический корень n-ой степени?

   б) Перечислите свойства арифметических корней n-ой степени.

2. Изучить условие заданий для самой самостоятельной работы.
3. Оформить отчет о работе.

Решить самостоятельно:

Вариант 1.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[3]{-27}$.
2. Решите уравнение: $x^4 = -16$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[3]{1000\cdot 27\cdot 8}$; б) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; в) $\sqrt[5]{0{,}4^5\cdot 5^5}$; г) $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[7]{128}$ или $\sqrt[5]{4}$?

Вариант 2.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[4]{625}$.
2. Решите уравнение: $x^3 = 125$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[3]{64\cdot 125\cdot 729}$; б) $\sqrt[5]{\frac{243}{32}}$; в) $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^6\cdot 12^6}$; г) $\frac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt[4]{\frac{5}{4}}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[8]{26}$ или $\sqrt[4]{5}$?

Вариант 3.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[7]{-\qquad}$.
2. Решите уравнение: $x^4 = 64$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[4]{0{,}0081\cdot 0{,}0016\cdot 625}$; б) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt[3]{16^3\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3\cdot 0{,}125}$; г) $\frac{\sqrt[4]{112}}{\sqrt[4]{7}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[5]{5}$ или $\sqrt[3]{3}$?

Вариант 4.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$.
2. Решите уравнение: $x^5 = -\frac{1}{243}$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[4]{16\cdot 625\cdot 81}$; б) $\sqrt[3]{192}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$; в) $\sqrt[4]{27^4\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^4\cdot(0{,}5)^4}$; г) $\frac{\sqrt[5]{224}}{\sqrt[5]{7}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[3]{7}$ или $\sqrt[6]{50}$?

Вариант 5.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[5]{-32}$.
2. Решите уравнение: $x^4 = 16$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}\cdot 100000}$; б) $\sqrt[3]{18}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; в) $\sqrt[3]{2^6\cdot 5^9}$; г) $\frac{\sqrt{200}-\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[5]{-11}$ или $\sqrt[5]{-7}$?

Вариант 6.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$.
2. Решите уравнение: $x^5 = -32$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[5]{0{,}00001 \cdot 32 \cdot 0{,}00243}$; б) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$; в) $\sqrt[4]{3^8 \cdot 2^{20}}$; г) $\frac{\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[6]{0{,}04}$ или $\sqrt[6]{\frac{1}{26}}$?

Самостоятельная работа №25 на тему: Решение иррациональных уравнений

Цель: Закрепить навыки решения иррациональных уравнений.

Теоретический материал 

Формулы для повторения:

$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$;

$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$;

Решение квадратных уравнений:

$\boldsymbol{a \cdot x^2 + bx + c = 0}$

$\boldsymbol{D = b^2 - 4ac,}$

Если $\boldsymbol{D} > 0$, **то** $\boldsymbol{x_{1,2}} = \frac{\boldsymbol{-b\pm\sqrt{d}}}{\boldsymbol{2a}}$

Если $\boldsymbol{D = 0}$, **то** $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{2a}}$

Если $\boldsymbol{D} < 0$, **то корней нет**

ПАМЯТКА

При решении иррациональных уравнений следует учитывать, что:

1) подкоренное выражение корня ***четной*** степени должно быть **неотрицательным** и значение корня неотрицательно;
2) все корни ***нечетной*** степени определены при **любом** действительном значении подкоренного выражения;
3) используются два основных метода – возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень и введение новой переменной;

4) при возведении обеих частей уравнения в четную степень ***возможно*** появление посторонних корней, поэтому проверка является составной частью решения

Указания к выполнению самостоятельной работы

ПРИМЕР 1. Решите уравнение $\sqrt{x+16}-x+4=0$.

РЕШЕНИЕ. Уединим радикал и затем возведем обе части в квадрат

$$\left(\sqrt{x+16}\right)^2=(x-4)^2,\quad x+16=x^2-8x+16,$$

$$x^2-9x=0,\quad x_1=0,\quad x_2=9.$$

Проверка показывает, что $x_1=0$ – посторонний корень.

ОТВЕТ: 9.

ПРИМЕР 2. Решите уравнение $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$.

РЕШЕНИЕ. *Введем новую переменную* $t=\sqrt{x^2+3x-6}$, $t\geq 0$. Тогда $x^2+3x=t^2+6$ и уравнение примет вид

$t^2+6-18+4t=0,\ t^2+4t-12=0,\ t_1=2$ или $t_2=-6$ - не подходит по смыслу.

Далее

$$\sqrt{x^2+3x-6}=2,\quad x^2+3x-6=4,\quad x^2+3x-10=0,\quad x_1=-5,\quad x_2=2.$$

ОТВЕТ: - 5; 2.

Решить самостоятельно

Вариант 1

Решить уравнения

7. $\sqrt{x^2-4x}=\sqrt{6-3x}$;
8. $\sqrt{x^2+x-3}=\sqrt{1-2x}$;
9. $\sqrt{3x+1}=x-1$;
10. $\sqrt{x-2+2\sqrt{x+6}}=4$;
11. $2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}=1$;
12. $x^2+3x-\sqrt{x^2+3x}-2=0$;
13. При каких значениях x функция $y=\sqrt[3]{x^2-1}$ принимает значение равное 2?

Вариант 2

Решить уравнения

1. $\sqrt{x^2 - 10} = \sqrt{-3x}$;
2. $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{1 - x}$;
3. $\sqrt{2x + 4} = x - 2$;
4. $\sqrt{x - 1 + \sqrt{x + 2}} = 3$;
5. $3\sqrt{x} + 2\sqrt[4]{x} = 5$;
6. $x^2 - 8x - 2\sqrt{x^2 - 8x - 3} = 0$;
7. При каких значениях x функция $y = \sqrt[3]{x^2 + 2}$ принимает значение равное 3?

Самостоятельная работа №26 по теме: «Преобразование выражений, содержащих степени с дробными показателями»

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Преобразование выражений, содержащих степени с дробными показателями».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

Перед выполнением работы:

1. Ответить на контрольные вопросы:

   а) Дайте определение степени с натуральным, отрицательным и дробным показателями.

   б) Перечислите свойства степеней с рациональным показателем.

2. Изучить условие заданий для практической работы.
3. Оформить отчет о работе.

Тренировочная таблица

Вычислите:

8	$(\sqrt{32})^{\frac{2}{5}}$	$4^{-\frac{3}{2}}$	$64^{\frac{5}{6}}$	$32^{-\frac{3}{5}}$	$(\sqrt{27})^{\frac{2}{3}}$	$32^{\frac{4}{5}}$	$(\sqrt{8})^{\frac{2}{3}}$	$16^{-\frac{3}{4}}$
7	$32^{-\frac{3}{5}}$	$\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$125^{-\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$	$16^{-\frac{1}{4}}$	$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$81^{-\frac{1}{4}}$	$\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$

6	$16^{\frac{1}{4}}$	$64^{\frac{1}{2}}$	$8^{\frac{1}{3}}$	$32^{\frac{1}{5}}$	$27^{\frac{1}{3}}$	$81^{\frac{1}{4}}$	$64^{\frac{1}{3}}$	$25^{\frac{1}{2}}$
5	$(\sqrt{7})^2$	$(\sqrt{2})^8$	$(\sqrt{5})^4$	$(\sqrt{2})^{10}$	$(\sqrt{6})^4$	$(\sqrt{2})^6$	$(\sqrt{3})^4$	$(\sqrt{5})^0$
4	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$
3	6^{-2}	2^{-4}	3^{-3}	5^{-1}	3^{-4}	2^{-3}	7^{-2}	4^{-1}
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{1}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{4}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{3}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$
1	3^4	4^3	2^4	5^3	2^5	3^3	5^0	2^3
	a	b	c	d	e	f	g	h

Варианты самостоятельной работы

Вариант 1.

Вычислите: а) 2^{-1}; б) $27^{\frac{1}{3}}$; в) $\left(\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$; г) $\dfrac{25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}{625\cdot 5^{-3}}$.

Вариант 2.

Вычислите: а) 1^{-7}; б) $27^{\frac{2}{3}}$; в) $9\cdot 0{,}027^{-\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$; г) $48^{\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Вариант 3.

Вычислите: а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; б) $125^{\frac{2}{3}}$; в) $4^{-2}\cdot\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$; г) $\dfrac{12^{\frac{3}{4}}\cdot 3^{\frac{9}{4}}}{4^{-\frac{1}{4}}}$.

Вариант 4.

Вычислите: а) $(-1)^{-7}$; б) $36^{-\frac{1}{2}}$; в) $\left(\frac{1}{625}\right)^{-0{,}75}-12\cdot 0{,}0081^{-0{,}25}$; г

$\sqrt[5]{64}:2^{-\frac{1}{5}}\cdot\left(2^{\frac{1}{10}}\right)^{6}$.

Вариант 5.

Вычислите: а) $5^0\cdot(-3)^{-2}+(-3)^{-2}$; б) $16^{-\frac{1}{4}}$; в) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}$; г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{4}{81}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Вариант 6.

Вычислите: а) $0^{\frac{5}{6}}$; б) $100^{-\frac{1}{2}}$; в) $2^{\frac{4}{5}}\cdot 2^{\frac{11}{5}}$; г) $\dfrac{2\cdot 4^{-2}+\left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{125^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}+\left(\sqrt{3}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$.

Вариант 7.

Вычислите: а) $\left(6\cdot 2^{-2}\right)^{-1}$; б) $9^{-\frac{3}{2}}$; в) $\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

г) $\dfrac{6^{1,7}\cdot 2^{1,3}}{3^{-1,3}}$.

Вариант 8.

Вычислите: а) $(-3)^{-4}$; б) $0.01^{-\frac{1}{2}}$; в) $\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

г) $136^{0}+0{,}027^{-\frac{1}{3}}+\left(0{,}2^{-13}\cdot 125^{-3}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{4}\right)^{-2}$

Самостоятельная работа №27 на тему: Решение показательных уравнений, неравенств и систем уравнений.

Цель: Знать методы решения показательных уравнений и неравенств, применять их при решении упражнений.

Теоретический материал 

Степени чисел от 0 до 10

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4^n	1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	
5^n	1	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625		
6^n	1	6	36	216	1296	7776	46656	279936			
7^n	1	7	49	343	2401	16807	117649				
8^n	1	8	64	512	4096	32768					
9^n	1	9	81	729	6561	59049					
10^n	1	10	100	1000	10000						

Решение квадратных уравнений:

$a \cdot x^2 + bx + c = 0$

$D = b^2 - 4ac,$

Если $D > 0$, **то** $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

Если $D = 0$, **то** $x = \frac{-b}{2a}$

Если $D < 0$, **то корней нет**

Формулы сокращенного умножения:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Свойства степеней

Свойства корней n-ой степени

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3. $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$

4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

5. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

7. $a^0 = 1$

8. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$

9. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

4. $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

5. $\sqrt[n\cdot k]{a^{n\cdot k}} = \sqrt[n]{a^m}$

6. $\sqrt[n]{a^n} = a$

7. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Показательное уравнение – это уравнение, в котором неизвестное содержится в показателе степени

1. **Метод уравнивания показателей**

Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x) = g(x)$, где а – положительное число, отличное от нуля.

Пример 1

Решить уравнение:

$2^{2x-4} = 64$;

Решение: Представим 64 как 2^6 и перепишем заданное уравнение в виде: $2^{2x-4} = 2^6$. Это уравнение равносильно уравнению: $2x - 4 = 6$, откуданаходим: $x = 5$.

Ответ: x=5

Пример 2

Решить уравнение:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

Решение: Преобразуем $\frac{1}{\sqrt{3}}$ как $\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ и перепишем заданное уравнение в виде:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$. Это уравнение равносильно уравнению:

$2x - 3,5 = 0,5$, откуда находим $x = 2$.

Ответ: x = 2

Пример 3

Решить уравнение:

$\frac{(0,2)^{x-0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0,04^{x-2}$;

Преобразуем левую часть уравнения:

$(0,2)^{x-0,5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-0,5} = (5^{-1})^{x-0,5} = 5^{-1(x-0,5)} = 5^{0,5-x}$

$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = 5^{0,5}$

$$\frac{5^{0,5-x}}{5^{0,5}} = 5^{0,5-x-0,5} = 5^{-x}$$

Преобразуем правую часть уравнения:

$$5 \cdot 0{,}04^{x-2} = 5 \cdot \left(\frac{4}{100}\right)^{x-2} = 5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{x-2} = 5 \cdot (5^{-2})^{x-2} = 5 \cdot 5^{-2(x-2)}$$

$$= 5 \cdot 5^{4-2x} = 5^{1+4-2x} = = 5^{5-2x};$$

Таким образом, мы данное уравнение преобразовали к виду:

$5^{-x} = 5^{5-2x}$.

Далее получаем: $-x = 5 - 2x$, отсюдаследует$x = 5$. Ответ: x=5

Пример 4

Решить уравнение

$$64^{\frac{x}{2}} \cdot 3^x = 576$$

Решение. Заметим, что

$64 = 8^2,\ 576 = 24^2$

Тогда данное уравнение равносильно каждому из уравнений

$8^x 3^x = 24^2,\ \ (8 \cdot 3)^x = 24^2,\ \ \ 24^x = 24^2$

откуда $x = 2$.

Пример 5

Решить уравнение

5. $2^x = 3$; Данное уравнение мы не можем привести к одному основанию. Используем метод логарифмирования.

Логарифмируем данное уравнение по основанию 2.

$\log_2 2^x = \log_2 3$;

Использую свойство логарифма, данное уравнение перепишем в виде:

$x \cdot \log_2 2 = \log_2 3$, учитывая, что $\log_2 2 = 1$, найдем значение x:

$x = \log_2 3$

Решить самостоятельно:

1. $3^x = 9$;
2. $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 1$;
3. $0{,}5^x = 0{,}125$;
4. $10^x = \sqrt[4]{1000}$;
5. $5^x = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$;
6. $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$;
7. $\left(5^{x^2+x-2}\right)^{3-x} = 1$;
8. $2^{x+1} = 4$;
9. $5^{3x-1} = 0{,}2$;
10. $6^{2x-8} = 216^x$.

Решение показательных уравнений. Метод выноса за скобки

Образцы решения

1. Решить уравнение: $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$

В левой части выносим за скобки степень с наименьшим показателем, то есть 3^{x-2}. В результате получим:

$$3^{x-2}\left(\frac{3^{x+1}}{3^{x-2}} - \frac{2 \cdot 3^{x-2}}{3^{x-2}}\right) = 25$$

$$3^{x-2}(3^{x+1-(x-2)} - 2) = 25$$

$$3^{x-2}(3^{x+1-x+2} - 2) = 25$$

$$3^{x-2}(3^3 - 2) = 25$$
$$3^{x-2} \cdot 25 = 25$$

$$3^{x-2} = 1\,, \qquad 3^{x-2} = 3^0, \quad \textit{отсюдаследует, чтох} = 2.$$

Ответ: x = 2.

Уравнения, сводящиеся к квадратным (метод замены)

Образцы решения

2. Решить уравнение: $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$.

Решение: Заметив, что $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, а$2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$

Перепишем заданное уравнение в виде:

$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$

Вводим новую переменную: $t = 2^x$, тогда уравнение примет вид:

$t^2 + 2t - 24 = 0$

Решив квадратное уравнение, получим: $t_1 = 4$, $t_2 = -6$. Но так как $t = 2^x$, то надо решить два уравнения:

$2^x = 4$ и$2^x \neq -6$

Решим первое уравнение:

$2^x = 2^2$отсюдаследует, чтох $= 2$.

Рассмотрим второе уравнение.

Второе уравнение не имеет решения, так как $2^x > 0$ для любых значений x.

Ответ: 2.

Решить самостоятельно:

1. $2^{2x} + 3 \cdot 2^x - 10 = 0$;
2. $\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x - 6 = 0$;
3. $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$;
4. $3^{x+2} - 3^x = 72$;
5. $2^x - 2^{x-4} = 15$;

6. $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 3159$;

7. $2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x-2} = 1443$;

Показательные неравенства

Показательными неравенствами называются неравенства вида: $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где a – положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящиеся к этому виду.
Теорема. Если $a > 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того смысла: $f(x) > g(x)$.
Если $0 < a < 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

Пример 1.

Решить неравенство: $2^{2x-4} > 64$
Решение:
Неравенство преобразуем: $2^{2x-4} > 2^6$. Это неравенство равносильно неравенству того же смысла $2x - 4 > 6, откуда x > 5$.
Ответ: $x \epsilon (5;\ \infty)$

Пример 2.

Решить неравенство: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$,
Решение:
Воспользуемся тем, что $\frac{1}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, перепишем заданное неравенство в виде:
$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$. Здесь основанием служит число $\frac{1}{3} < 1$. Значит, рассматриваемое неравенство равносильно неравенству противоположного смысла $2x - 3,5 > 0,5, откуда находим: x > 2$.
Ответ: $x \epsilon (-\infty; 2)$

Пример 3

Решить неравенство: $0,5^{x^2-3x} \leq 0,5^{3x-8}$
Так как $0,5 < 1$, то заданное неравенство равносильно неравенству противоположного смысла $x^2 - 3x \geq 3x - 8,\ т.е. x^2 - 6x + 8 \geq 0$
Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - 6x + 8$
$x_1 = 2, x_2 = 4$.
Значит, неравенство $x^2 - 6x + 8 \geq 0$ имеет смысл при $x \leq 2, или x \geq 4$.

Ответ: $x \epsilon (-\infty; 2) \cup (4; \infty)$

Пример 4

Решить неравенство $3^{6-x} > 1$.
Решение: $3^{6-x} > 3^0$, так как $3 > 1$, то это неравенство равносильно неравенству того же смысла $6 - x > 0$ Отсюда следует $-x > -6$. $Умножим правую и левую часть неравенства на (-1)$.
Знак неравенства поменяется на противоположный.
$x < 6$
Ответ: $x \epsilon (-\infty; 6)$.

Пример 5

Решить неравенство $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} < \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

Решение.

Воспользуемся тем, что $\frac{7}{3} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$

И запишем неравенство в виде: $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} < \left(\frac{3}{7}\right)^{-7x+3}$.

Так как $\frac{3}{7} < 1$, то неравенство равносильно неравенству противоположного смысла:

$3x - 7 > -7x + 3$,

$10x > 10$,

Отсюда следует, $x > 1$.

Ответ: $x \epsilon (1;\ \infty)$

Решить самостоятельно:

1. При каких значениях a из неравенства $a^{x_1} > a^{x_2}$ следует неравенство: $x_1 > x_2$?
2. При каких значениях a из неравенства $a^{x_1} > a^{x_2}$ следует неравенство: $x_1 < x_2$?

Решить неравенство:

3. $5^x < 625$;
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \frac{1}{8}$;
5. $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{8}{27}$;
6. $2^{x+1} < 32$;
7. $3^x \leq 1$;
8. $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+6} > \frac{4}{9}$;
9. $(0{,}1)^{5x-9} < 0{,}001$;
10. $4^{5x-1} > 16^{3x+2}$;

Пример 7

Решить неравенство $2^x - 2^{x-2} \leq 3$.

Решение:

Выносим за скобки степень с наименьшим показателем, т.е. 2^{x-2}.

Получим: $2^{x-2}(2^2 - 1) \leq 3$,

$$2^x \cdot 3 \leq 3,$$

$2^x \leq 1$, $\quad$ *таккак* $2^0 = 1$ *то*

$2^x \leq 2^0$

Так как основание $2 > 1$, то неравенство равносильно неравенству того же смысла $x \leq 0$.

Ответ: $x \epsilon (-\infty; 0)$

Решить самостоятельно:

1. $2^x + 2^{x+2} \leq 20$;
2. $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+4} + \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+5} > 6$;
3. $2^{x+2} - 2^x > 96$;

Пример 8

Решить неравенство $7^{2x} - 8 \cdot 7^{x} + 7 > 0$

Решение.

Заменим : $7^{x} = t, t > 0$;

Получим неравенство: $t^2 - 8t + 7 > 0$. Трехчлен $t^2 - 8t + 7$ разложим на множители:
$(t-7)(t-1) > 0$.

$t < 7; t > 1$.

$7^x < 7, \quad a = 7 > 1, то\, x < 1$

$7^x > 1, \quad 7^x > 7^0, \quad a = 7 > 1, \quad то\, x > 0$.

Ответ: $x \epsilon (-\infty; 1) \cup (0; \infty)$

Пример 9

Решить неравенство: $\frac{1}{4} \cdot 4^{x} + 2^{x} - 3 \leq 0$;

Решение: $2^x = t, t > 0$; Получим неравенство: $\frac{1}{4}t^2 + t - 3 \leq 0$;

Преобразуем неравенство: $t^2 + 4t - 12 \leq 0$;

Трехчлен $t^2 + 4t - 12$ разложим на множители $(t+6)(t-1) \leq 0$

$t + 6 > 0$, следовательно, $t - 1 \leq 0$. $2^{□} < 1$, так как □ $= 2 > 1$, то $x < 0$.

Решить самостоятельно:

1. $7^{2x} - 8 \cdot 7^{x} + 7 > 0$;
2. $9^{x} - 6 \cdot 3^{x} < 27$;
3. $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x} - 8 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{x} + 7 < 0$;
4. $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^{x} + 2 \geq 0$;

Системы показательных уравнений

Примеры с решениями.

Пример 1

Решить систему.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3^{x+y} = 9 \end{cases}$$

Решение: Воспользуемся способом подстановки. Выразив из первого уравнения у, получим $y = 1 - 2x$. Тогда $3^{x+(1-2x)} = 9$ или $3^{1-x} = 3^2$, откуда
$1 - x = 2,\ x = -1$. Следовательно, $y = 1 - 2 \cdot (-1), y = 3$.

Ответ: $(-1; 3)$

Пример 2

Решить систему:

$$\begin{cases} 2 \cdot (\sqrt{2})^{x+y} = 16^{3x-y} \\ 9^{x+y} - 3^{x+y} = 72 \end{cases}$$

Решение:

1. Преобразуем первое уравнение системы к более простому виду:

$2 \cdot (\sqrt{2})^{x+y} = 16^{3x-y} \qquad (\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}})$

$$2 \cdot 2^{\frac{1}{2}(x+y)} = 2^{4(3x-y)}$$

$2^{1+\frac{x+y}{2}} = 2^{12x-4y}$

$1 + \frac{x+y}{2} = 12x - 4y$

$2 + x + y = 24x - 8y$

$23x - 9y = 2$

2. Преобразуем второе уравнение к более простому виду. Введем новую переменную $\square = 3^{\square+\square}$. Тогда второе уравнение системы примет вид: $\square^2 - \square = 72$, откуда $\square_1 = 9$, $\square_2 = -8$. Из уравнения $3^{x+y} = 9$ находим: $x + y = 2$; уравнение $3^{x+y} = -8$ не имеет решений.

Итак, второе уравнение системы нам удалось преобразовать к виду: $x + y = 2$

3. Решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 23x - 9y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Умножим обе части второго уравнения на 9 и сложим полученное уравнение с первым уравнением системы:

$(23x - 9y) + (9x + 9y) = 2 + 18$;

$32x = 20, \quad x = \frac{5}{8}$

Из уравнения $x + y = 2$ находим: $\frac{5}{8} + y = 2; \quad y = \frac{11}{8}$

Ответ: $\left(\frac{5}{8}; \frac{11}{8}\right)$

Решить самостоятельно:

19.1. $\begin{cases} x - y = 1 \\ 4^{2x-3y} = 1 \end{cases}$

19.4. $\begin{cases} 5^{2x-y} = 125 \\ 4^{x-y} = 4 \end{cases}$

19.2. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 12 \\ 2^{y-1} - 3^x = 5 \end{cases}$

19.3. $\begin{cases} 2^{x+y} = 16 \\ 3^y = 27^x \end{cases}$

Самостоятельная работа №28 на тему: Преобразование выражений, содержащих показательные и логарифмические функции.

Цель: Знать основное логарифмическое тождество, свойства логарифмов, уметь применять их при решении упражнений.

Теоретический материал: 

Определение логарифма

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

1. $\log_a b = c, \quad a^c = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$

Десятичные логарифмы (логарифмы по основанию 10)	$\log_{10} a$	обозначаются как	$\lg a$ или $\ell g a$
Натуральные логарифмы (логарифмы по основанию *e*)	$\log_e a$	обозначаются как	$\ln a$ или $\ell n\, a$

Свойства логарифм

$$a^{\log_a b} = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^m = m$$

Действия с логарифмами

логарифм произведения: $\log_c(a \cdot b) = \log_c a + \log_c b, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$

логарифм частного: $\log_c\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$

логарифм степени: $\log_c a^k = k \cdot \log_c a, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad a > 0$

логарифм корня: $\log_c \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_c a, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad a > 0$

переход к новому основанию: $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}, \quad b > 0, \quad b \neq 1, \quad a > 0, \quad c > 0, \quad c \neq 1$

Определение логарифма

Логарифмом числа *b* по основанию *a* называется показатель степени, в которую нужно возвести *a*, чтобы получить *b*.

$$\log_a b = c, \quad a^c = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$$

Десятичные логарифмы (логарифмы по основанию 10)	$\log_{10} a$	обозначаются как	$\lg a$ или $\ell g a$
Натуральные логарифмы (логарифмы по основанию *e*)	$\log_e a$	обозначаются как	$\ln a$ или $\ell n\, a$

Свойства логарифма

$$a^{\log_a b} = b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$$
$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log_a a^m = m$$

Действия с логарифмами

логарифм произведения: $\log_c(a \cdot b) = \log_c a + \log_c b, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$

логарифм частного: $\log_c\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad a > 0, \quad b > 0$

логарифм степени: $\log_c a^k = k \cdot \log_c a, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad a > 0$

логарифм корня: $\log_c \sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_c a, \quad c > 0, \quad c \neq 1, \quad a > 0$

переход к новому основанию: $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}, \quad b > 0, \quad b \neq 1, \quad a > 0, \quad c > 0, \quad c \neq 1$

Дополнительные формулы: $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0, \quad b \neq 1$

$$\frac{\log_n b}{\log_n c} = \frac{\log_m b}{\log_m c} = \log_c b$$
$$\log_n b \cdot \log_m c = \log_m b \cdot \log_n c$$
$$a^{\log_n b} = b^{\log_n a}$$
$$\log_{a^m} b^m = \log_a b, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad b > 0$$

Логарифмические уравнения

Основные типы логарифмических уравнений:

1). $\log_a f(x) = g(x)$, $a>0$, $a \neq 1$

2). $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a>0$, $a \neq 1$

3). $c_0 \log^2_a x + c_1 \log_a x + c_2 = 0$, $c_0 \neq 0$, $a>0$, $a \neq 1$

4). $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$

5). $\log_{h(x)} f(x) = \log_{g(x)} f(x)$, где f(x), g(x), h(x) – заданныефункции.

Методы решения логарифмических уравнений.

1. Метод решения на основании определения логарифма.

Теорема. Уравнения $\log_a f(x) = g(x)$, $a>0$, $a \neq 1$ и $f(x) = a^{g(x)}$ равносильны

2. Метод потенцирования.

Пусть $a \neq 1$ – фиксированное положительное число и пусть дано уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Замену этого уравнения уравнением $f(x) = g(x)$ называют **потенцированием уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.**

Замечание. Потенцирование уравнения может привести к появлению посторонних корней.

Пример. Уравнение $\lg(x^2 - 4) = \lg(4x - 7)$ приводит к уравнению – следствию $(x^2 - 4) = (4x - 7)$, имеющему корень 1, посторонний для исходного уравнения.

Теорема. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно любой из систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Теорема. Уравнение $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ равносильно любой из систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \end{cases}$$

Теорема. Уравнение $\log_{h(x)} f(x) = \log_{g(x)} f(x)$, где $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – заданные функции равносильно любой из систем:

$$\begin{cases} h(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$$

a. Метод введения новой переменной.

Уравнение $c_0 \log^2_a x + c_1 \log_a x + c_2 = 0$, $c_0 \neq 0$, $a>0$, $a \neq 1$

Обозначив $\log_a x = y$ и решив полученное квадратное уравнение, придём к уравнению типа 1).

Отметим, что часто исходное уравнение сводится к одному из указанных типов после некоторых преобразований, использующих свойства логарифмов.

Логарифмические неравенства

Основные типы логарифмических неравенств:

1). $\log_a f(x) > g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$

2). $\log_a f(x) < g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$

3). $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$

4). $c_0 \log^2_a x + c_1 \log_a x + c_2 > 0$, $c_0 \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

5). $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$

Решение указанных неравенств основано на следующих утверждениях:

Теорема. Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно любой из систем:

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно любой из систем:

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Теорема. Неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Теорема. Неравенство $\log_a f(x) > g(x)$, $a > 1$равносильно неравенству $f(x) > a^{g(x)}$, при $0 < a < 1$ – системе

$$\begin{cases} f(x) > a^{g(x)} \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Теорема. Неравенство $\log_a f(x) < g(x)$, $a > 1$равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < a^{g(x)} \\ f(x) > 0 \end{cases},$$

при $0 < a < 1$ – неравенству $f(x) < a^{g(x)}$.

Замечания.

1). Если исходное неравенство содержит знаки ≥ или ≤, то в соответствующей равносильной системе (неравенстве) следует поставить знак нестрогого неравенства во всех неравенствах, связанных с ОДЗ.

2). Громоздкость приведённых теорем, необходимость рассмотрения различных случаев в зависимости от основания логарифма служат причиной многочисленных ошибок, характерных для решения неравенств рассматриваемого вида. Следует также избегать ошибок, связанных с неправильным использованием формул.

Решить самостоятельно: 

Вариант 1

1. Вычислить:

   1.1. $5{,}1^{\log_{5,1} 9}$; 1.2. $7^{\log_7 16}$; 1.3. $12^{1+\log_{12} 4}$; 1.4. $\log_2 \frac{1}{32}$;

   1.5. $\log_{27} 9$; 1.6. $3^{1+\log_3 5}$;.

2. Выяснить при каких значениях X имеет смысл выражение:

   2.1. $\log_{\frac{1}{2}}(4-x)$; 2.2. $\log_{\frac{2}{3}}(x^2-16)$; 2.3. $\log_3 \frac{7-3x}{x-4}$;

3. Вычислить:

   3.1. $2^{2+\log_2 5}$; 3.2. $2^{3\log_2 4}$; 3.3. $\frac{\log_7 25}{\log_7 5}$.

4. Вычислить:

   4.1. $\log_{15} 5 + \log_{15} 3$;

   4.2. $\log_{0,1} 5 + \log_{0,1} 2$;

   4.3. $\log_5 50 - \log_5 2$;

   4.4. $\log_2 8^7$;

   4.5. $\log_{13} \sqrt[5]{169}$;

Вариант 2

1. Вычислить:

   1.1. $6{,}3^{\log_{6,3} 7}$; 1.2. $5^{\log_5 13}$; 1.3. $7^{2+\log_7 4}$; 1.4. $\log_3 \frac{1}{27}$;

   1.5. $\log_{16} 8$; 1.6. $5^{\log_5 0,2}$.

2. Выяснить при каких значениях X имеет смысл выражение:

2.1. $\log_{0,2}(7-x)$; 2.2. $\log_{\frac{2}{3}}(x^2-16)$; 2.3. $\log_5 \frac{7+2x}{x-3}$;

3. Вычислить:

3.1. $3^{1+\log_3 8}$; 3.2. $5^{2\log_5 3}$;3.3. $\frac{\log_4 36}{\log_4 6}$;

4. Вычислить:

4.1. $\log_{12} 3+\log_{12} 4$;

4.2. $\log_{\frac{1}{6}} 4+\log_{\frac{1}{6}} 9$;

4.3. $\log_4 192-\log_4 3$;

4.4. $\log_3 9^{10}$;

4.5. $\log_{15} \sqrt[3]{225}$;

Самостоятельная работа №29 на тему: Решение логарифмических уравнений и неравенств

Цель: Знать методы решения логарифмических уравнений и неравенств, применять их при решении упражнений.

Теоретический материал 

Основные типы логарифмических уравнений:

1). $\log_a f(x) = g(x)$, $a>0$, $a \neq 1$

2). $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a>0$, $a \neq 1$

3). $c_0 \log^2_a x + c_1 \log_a x + c_2 = 0$, $c_0 \neq 0$, $a>0$, $a \neq 1$

4). $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$

5). $\log_{h(x)} f(x) = \log_{g(x)} f(x)$, где $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – заданныефункции.

Методы решения логарифмических уравнений.

3. Метод решения на основании определения логарифма.

Теорема. Уравнения $\log_a f(x) = g(x)$, $a>0$, $a \neq 1$ и $f(x) = a^{g(x)}$ равносильны

4. Метод потенцирования.

Пусть $a \neq 1$ – фиксированное положительное число и пусть дано уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Замену этого уравнения уравнением $f(x) = g(x)$ называют **потенцированием уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.**

Замечание. Потенцирование уравнения может привести к появлению посторонних корней.

Пример. Уравнение $\lg(x^2 - 4) = \lg(4x - 7)$ приводит к уравнению – следствию $(x^2 - 4) = (4x - 7)$, имеющему корень 1, посторонний для исходного уравнения.

Теорема. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно любой из систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Теорема. Уравнение $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ равносильно любой из систем:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \end{cases}$$

Теорема. Уравнение $\log_{h(x)} f(x) = \log_{g(x)} f(x)$, где $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ – заданные функции равносильно любой из систем:

$$\begin{cases} h(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$$

a. **Метод введения новой переменной.**

Уравнение $c_0 \log^2_a x + c_1 \log_a x + c_2 = 0$, $c_0 \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

Обозначив $\log_a x = y$ и решив полученное квадратное уравнение, придём к уравнению типа 1).

Отметим, что часто исходное уравнение сводится к одному из указанных типов после некоторых преобразований, использующих свойства логарифмов.

Логарифмические неравенства

Основные типы логарифмических неравенств:

1). $\log_a f(x) > g(x)$, $a>0$, $a \neq 1$

2). $\log_a f(x) < g(x)$, $a>0$, $a \neq 1$

3). $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $a>0$, $a \neq 1$

4). $c_0 \log^2_a x + c_1 \log_a x + c_2 > 0$, $c_0 \neq 0$, $a>0$, $a \neq 1$

5). $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$

Решение указанных неравенств основано на следующих утверждениях:

Теорема. Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно любой из систем:

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно любой из систем:

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Теорема. Неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно совокупности систем:

$$\begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Теорема. Неравенство $\log_a f(x) > g(x)$, $a > 1$равносильно неравенству $f(x) > a^{g(x)}$, при $0<a< 1$ – системе

$$\begin{cases} f(x) > a^{g(x)} \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Теорема. Неравенство $\log_a f(x) < g(x)$, $a > 1$равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < a^{g(x)} \\ f(x) > 0 \end{cases},$$

при $0 < a < 1$ – неравенству $f(x) < a^{g(x)}$.

Замечания.

1). Если исходное неравенство содержит знаки $\geq$ или $\leq$, то в соответствующей равносильной системе (неравенстве) следует поставить знак нестрогого неравенства во всех неравенствах, связанных с ОДЗ.

2). Громоздкость приведённых теорем, необходимость рассмотрения различных случаев в зависимости от основания логарифма служат причиной многочисленных ошибок, характерных для решения неравенств рассматриваемого вида. Следует также избегать ошибок, связанных с неправильным использованием формул.

Образцы решения логарифмических уравнений

1. **Решить уравнение:**

$\log_3(x-2) + \log_3(x+2) = \log_3(2x-1)$

Решение: Используя формулу: $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$, заменим сумму логарифмов произведением:

$\log_3((x-2)\cdot(x+2)) = \log_3(2x-1)$

$x^2 - 4 = 2x - 1$

$x^2 - 4 - 2x + 1 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_1 = 3; \quad x_2 = -1.$

Проверка:

$x_1 = 3$

$\log_3(3-2) + \log_3(3+2) = \log_3(2\cdot 3 - 1)$

$\log_3 5 = \log_3 5$

$x_2 = -1$

$\log_3(-1-2) + \log_3(-1+2) = \log_3(2\cdot(-1) - 1)$ - не существует.

Ответ: $x = 3$

2. **Решить уравнение:**

$\log_4^2 x + \log_4 x - 2 = 0$. Используем метод замены.

$$\log_4 x = t \implies t^2 + t - 2 = 0$$

$t_1 = 1, \qquad t_2 = -2$. Подставим в замену.

$\log_4 x = 1 \Rightarrow x = 4^1 = 4, \quad \log_4 x = -2 \Rightarrow x = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}.$

Ответ: $x = 4; \quad x = \frac{1}{16}.$

Решить самостоятельно: 

№п/п	Вариант 1	Вариант 2
1	$3^{x+2} - 3^{x} = 72$	$2^{x} - 2^{x-4} = 15$
2	$2 \cdot 3^{x+3} - 5 \cdot 3^{x-2} = 1443$	$3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 3159$
3	$2^{2x} + 3 \cdot 2^{x} - 10 = 0$	$2 \cdot 4^{x} - 5 \cdot 2^{x} + 2 = 0$
4	$\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{x} - 6 = 0$	$4 \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{x} + 15 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{x} - 4 = 0$
5	$log_3^2 x - 2log_3 x - 3 = 0$	$log_4^2 x - 4\log_4 x + 3 = 0$
6	$\log_7 2 = \log_7 x^2 - \log_7 8$	$\log_2 x^2 = \log_2 2 + \log_2 18$
7	$\log_{0.7}(x+3) + \log_{0.7}(x-3) = \log_{0.7}(2x-1)$	$\log_{11}(x+2) + \log_{11}(x-2) = \log_{11}(2x-1)$

Показательные и логарифмические неравенства

1	$2^{x} + 2^{x+2} \le 20$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+4} + \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+5} > 6$
2	$7^{x} \ge 7^{x-1} + 6$	$2^{x+2} - 2^{x} > 96$
3	$7^{2x} - 8 \cdot 7^{x} + 7 > 0$	$9^{x} - 6 \cdot 3^{x} < 27$
4	$0{,}2^{2x} - 1{,}2 \cdot 0{,}2^{x} + 0{,}2 > 0$	$\left(\frac{1}{7}\right)^{2x} - 8 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{x} + 7 < 0$
5	$\log_7(2-x) \le \log_7(3x+6)$	$\log_{2,5}(4x-5) \ge \log_{2,5}(3x-6)$
6	$\log_{\frac{1}{3}}(1-2x) > \log_{\frac{1}{3}}(5x+25)$	$\log_{0,8}(2x-3) < \log_{0,8}(3x-5)$

Тема: Интеграл и его приложении

Самостоятельная работа №30 по теме: «Вычисление первообразных функций»

Цель:1.Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление первообразной функции».

2.Закрепить и систематизировать знания по теме.

3.Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

Перед выполнением работы: 

1. Ответить на контрольные вопросы:
   а) Что называется первообразной функции?

   б) Сформулируйте основное свойство первообразной.

   в) Сформулируйте три правила нахождения первообразных.
2. Изучить образцы решенных примеров.
3. Выполнить задания для самоконтроля.
4. Изучить условие заданий для практической работы.
5. Оформить отчет о работе.

Указания к выполнению работы

ПРИМЕР 1. Выясните, является ли $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на ***R***?

РЕШЕНИЕ. Находим

$$F'(x)=\left(\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x\right)'=\frac{2}{9}\cdot 3x^2-3\cdot 1+(-\sin x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x=f(x).$$

Следовательно, по определению $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на ***R***.

ПРИМЕР 2. Для функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\cos^2 x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$.

РЕШЕНИЕ. По основному свойству первообразных любая первообразная функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\cos^2 x}$ записывается в виде $F(x)=2\cdot 2\sqrt{x}-tgx+C=4\sqrt{x}-tgx+C$. Координаты точки $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$ графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению:

$$1+2\sqrt{\pi}=4\sqrt{\frac{\pi}{4}}-tg\frac{\pi}{4}+C.$$

Отсюда находим, что

$$1+2\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}-1+C,$$

$$C=2.$$

Следовательно, уравнение искомой первообразной имеет вид: $F(x)=4\sqrt{x}-tgx+2$.

Тест для выполнения работы

Выберите правильный вариант ответа.

1. Функция $F(x)=3x^2+0{,}5\cos 2x+5$ является первообразной для функции:
   а) $f(x)=6x-\sin 2x$; б) $f(x)=3x^3+0{,}5\cos 2x$; в) $f(x)=9x^3-2\sin 2x$.
2. Дана функция $g(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{2}{\sqrt{x}}$. Первообразная для функции *g(x)*, график которой проходит через точку $\left(\frac{\pi}{4};2\sqrt{\pi}-1\right)$, это:
   а) $G(x)=-4\sqrt{x}-ctgx+4\sqrt{\pi}$; б) $G(x)=ctgx-4\sqrt{x}+2$; в) $G(x)=-ctgx-4\sqrt{x}+2$.

Решить самостоятельно:

Вариант 1.

1. Является ли функция $F(x)=x^2+3x+1$ первообразной для функции $f(x)=2x+3$ на ***R***?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\frac{x^2}{3}-\frac{3}{x^2}$.

   б) Для функции $f(x)=\sin 2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};-2\right)$.

Вариант 2.

1. Является ли функция $F(x)=-\frac{x^4}{4}+5x+2$ первообразной для функции $f(x)=-x^3+5$ на ***R***?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\frac{3}{x^4}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

   б) Для функции $f(x)=(4-5x)^3$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(1;\frac{1}{20}\right)$.

Вариант 3.

1. Является ли функция $F(x)=x^2-x$ первообразной для функции $f(x)=2x-1$ на $\boldsymbol{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\dfrac{7}{\cos^2 x}-3x-x^3$.

   б) Для функции $f(x)=\sin 3x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\dfrac{\pi}{12};0\right)$.

Вариант 4.

1. Является ли функция $F(x)=\dfrac{1}{x^2}-\sin x$ первообразной для функции $f(x)=-\dfrac{1}{x^3}-\cos x$ на $\boldsymbol{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=x(x+1)(x+2)$.

   б) Для функции $f(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(0;3)$.

Вариант 5.

1. Является ли функция $F(x)=x^3+1$ первообразной для функции $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+x$ на $\boldsymbol{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\left(x^{10}-\dfrac{1}{x^{10}}\right)^2$.

   б) Для функции $f(x)=x-10\sin 2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(0;-5)$.

Вариант 6.

1. Является ли функция $F(x)=x+\cos x$ первообразной для функции $f(x)=1-\sin x$ на $\boldsymbol{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=3e^x+5\cos x-7x^4$.

   б) Для функции $f(x)=\dfrac{1}{(2x-1)^3}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(1;2)$.

Вариант 7.

1. Является ли функция $F(x)=2x^3+\dfrac{3}{4}x^4+5$ первообразной для функции $f(x)=3(x+2)x^2$ на $\boldsymbol{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\sqrt[7]{x}+7^x+2x^2$.

   б) Для функции $f(x)=-6\sin 2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\dfrac{\pi}{4};-3\right)$.

Вариант 8.

1. Является ли функция $F(x) = x + \frac{1}{2x^2}$ первообразной для функции $f(x) = 1 - \frac{1}{x^3}$, $x > 0$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = 2\sin x + 2^x - \frac{1}{x^3}$.

   б) Для функции $f(x) = \frac{1}{cos^2 \frac{x}{2}}$ найдите первообразную, график которой проходит

через точку $M\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{2}\right)$.

Самостоятельная работа №31 по теме «Вычисление определенного интеграла»

Цель:1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление определенного интеграла».

2.Закрепить и систематизировать знания по теме.

3.Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов

Перед выполнением работы:

1. Ответить на контрольные вопросы:
   а) Что называется первообразной функции?

   б) Сформулируйте основное свойство первообразной.

   в) Сформулируйте три правила нахождения первообразных.

   г) Запишите формулу Ньютона-Лейбница.

2. Изучить образцы решенных примеров.
3. Выполнить задания для самоконтроля.
4. Изучить условие заданий для практической работы.
5. Оформить отчет о работе.

Указания к выполнению работы

ПРИМЕР 1. Вычислите интеграл $\int_{-2}^{2}\left(-4x + 4 + x^2\right)dx$.

РЕШЕНИЕ. Найдем множество всех первообразных для функции $-4x + 4 + x^2$:

$$F(x) = -4 \cdot \frac{x^2}{2} + 4 \cdot x + \frac{x^3}{3} + C = -2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3} + C .$$

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_{-2}^{2} \left(-4x + 4 + x^2\right) dx = \left(-2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(-2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + \frac{2^3}{3}\right) - \left(-2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + \frac{(-2)^3}{3}\right) =$$

$$= \left(-8 + 8 + \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - 8 - \frac{8}{3}\right) = 21\frac{1}{3}.$$

О т в е т: $21\frac{1}{3}$.

ПРИМЕР 2. Выясните, при каком отрицательном значении переменной a верно равенство

$$\int_{-2a}^{a} 2x^3 dx = -7{,}5\,?$$

РЕШЕНИЕ. Поскольку для $2x^3$ одной из первообразных является $\frac{x^4}{2}$,

$$\int_{-2a}^{a} 2x^3 dx = \left(\frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = \frac{a^4}{2} - \frac{(-2a)^4}{2} = -\frac{15a^4}{2}.$$

Следовательно, нужно решить уравнение:

$$-\frac{15a^4}{2} = -7{,}5,$$

$$-\frac{15a^4}{2} = -\frac{15}{2},$$

$$a^4 = 1,$$

$$a = \pm 1.$$

Отрицательный корень этого уравнения – это число –1.

О т в е т: -1.

Задания для выполнения работы

Выберите правильный вариант ответа.

1. Значение $\int_{-1}^{1} \left(-6x + x^2 + 9\right) dx$ равно:

а) $18\frac{1}{3}$; б) $18\frac{2}{3}$; в) $19\frac{1}{3}$.

2. Равенство $\int\limits_a^{2a} x^3 dx = 3{,}75$ (где $a > 0$) верно, если a равно:

а) 1; б) 2; в) 3.

Решить самостоятельно: 

Вариант 1.

1. Вычислите интегралы: а) $\int\limits_{-1}^{2} x^2 dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} (1+\cos 2x)dx$.
2. Докажите справедливость равенства: $\int\limits_0^1 (2x+1)\,dx = \int\limits_0^2 (x^3-1)dx$.

Вариант 2.

1. Вычислите интегралы: а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} -2\sin x dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$.
2. Докажите справедливость равенства: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xd$ $\sqrt[3]{\ }$.

Вариант 3.

1. Вычислите интегралы: а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2}$.
2. Докажите справедливость равенства: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Вариант 4.

1. Вычислите интегралы: а) $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{2x}{9}\right)}$.
2. Докажите справедливость равенства: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int\limits_0 dx$.

Вариант 5.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{-1}^{2} -x^3 \, dx$;   б) $\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx$

2. Верно ли неравенство: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} < \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^2}$?

Вариант 6.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{dx}{\sin^2 x}$;   б) $\int_{0}^{2} (1+3x)^4 \, dx$.

3. Верно ли неравенство: $\int_{-1}^{1} x^4 \, dx < \int_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$?

Вариант 7.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x dx$;   б) $\int_{2}^{7} \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$.

2. Верно ли неравенство: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} > \int_{1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$?

Вариант 8.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{1}^{5} x^4 dx$;   б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$.

2. Верно ли неравенство: $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx > \int_{2}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2}$

Самостоятельная работа №32 «Применение интеграла для вычисления площадей и объемов»

Цель:1.Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Применение определенного интеграла для вычисления площадей и объемов».

2.Закрепить и систематизировать знания по теме.

3.Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

Перед выполнением работы:

1. Ответить на контрольные вопросы:

а) Какую фигуру называют криволинейной трапецией? Приведите примеры криволинейных трапеций.

б) Запишите формулу для вычисления площади криволинейной трапеции.

в) Покажите на рисунках и запишите интегральные формулы, с помощью которых можно вычислить площади фигур, не являющихся криволинейными трапециями.

г) Запишите и с помощью иллюстрации прокомментируйте интегральную формулу для вычисления объемов тел.

2. С помощью обучающей таблицы повторить план вычисления площади криволинейной трапеции и изучить образцы решенных задач.
3. Выполнить задания для самоконтроля (в таблице).
4. Изучить условие заданий для практической работы.
5. Оформить отчет о работе.

Теоретический материал 

Определение: **Неопределенным интегралом** функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:
F(x) + C. Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$- есть некоторая первообразная функции $f(x)$ на этом промежутке, С – const. При этом знак $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)$ - подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, x - переменная интегрирования, С- постоянная интегрирования.
Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется интегрированием данной функции.

Интегрирование – операция, обратная операции дифференцирования. У всякой непрерывной на данном интервале функции существует неопределенный интеграл.

Таблица неопределенных интегралов

$\int dx = x + C$	$\int sinxdx = -cosx + C$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int cosxdx = sinx + C$	$\int tgxdx = -ln\lvert cosx\rvert + C$
$\int \frac{dx}{x} = ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{sin^2x} = -ctgx + C$	$\int ctgxdx = ln\lvert x\rvert + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$	$\int \frac{dx}{cos^2x} = tgx + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \ell^x dx = \ell^x + C$	$\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctgx + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\lvert\frac{x - a}{x + a}\rvert + C$

Свойства неопределенного интеграла:
$\int dF(x) = F(x) + C$;

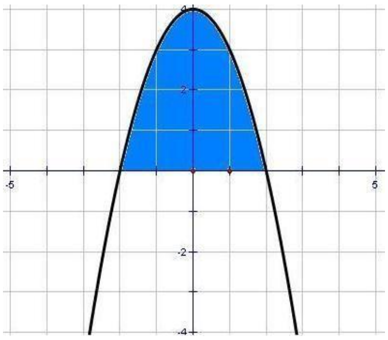
$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx;$

$\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C;$

Определение: Фигура, ограниченная снизу отрезком [a, b] оси Ox ,сверху графиком непрерывной функции y= f(x), принимающей положительные значения , а с боков отрезками прямых x = a, x =b называется криволинейной трапецией.

$\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).}$



Образец решения:

Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$y = 4 - x^2$ и $y=0$

<u>*Решение:*</u>

1. $y = 4 - x^2$- квадратичная функция, график – парабола, ветви направлены вниз, вершина (0;4)

$y = 0$ - ось абсцисс.

2. Найдём точки пересечения параболы с осью X: $x^2 - 4 = 0;$

$x^2 = 4, \quad x = 2, \quad x = -2.$

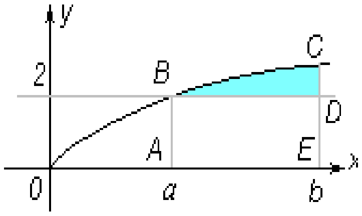
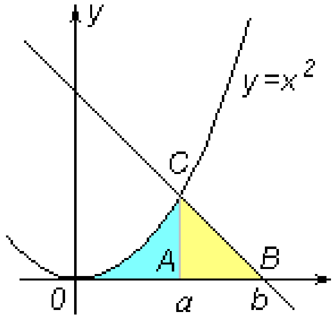
3. Найдём площадь криволинейной трапеции по формуле:

$$S = \int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = (4x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-2}^{2} = (4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}) - (4\cdot(-2) - \frac{(-2)^3}{3}) =$$

$$= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = 16 - 5\frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}\,(ед.^2)$$

Задание. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = \sqrt{x},\ y = 2,\ x = 9$; б) $y = x^2,\ y = 2 - x,\ y = 0$.

№ шага	План вычисления площади криволинейной трапеции	Применение плана	
		а) $y=\sqrt{x},\ y=2,\ x=9$	б) $y=x^2,\ y=2-x,\ y=0$
1	Строим заданные линии и штриховкой отмечаем фигуру, площадь которой надо найти. Установим, является ли эта фигура криволинейной трапецией		
2	Записываем формулу для вычисления площади искомой фигуры	$S=S_{ABCDE}-S_{ABDE}=$ $=\int_a^b\sqrt{x}dx-\int_a^b 2dx$	$S=S_{OAC}+S_{ACB}=$ $=\int_0^a x^2dx+\int_a^b(2-x)dx$
3	Находим пределы интегрирования	$\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=2; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4,$ $a=x_A=4,\ b=x_B=9$	$\begin{cases} y=x^2, \\ y=2-x; \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x=-2;1$
4	Вычисляем искомую площадь по формуле (*)	$S=\int_4^9\sqrt{x}dx-\int_4^9 2dx=\left.\frac{2x^{3/2}}{3}\right\|_4^9-$ $-\left.2x\right\|_4^9=\frac{2}{3}(27-8)-2(9-4)=$ $=\frac{8}{3},$ $S=2\frac{2}{3}$ (кв.ед.)	$S=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2-x)dx=$ $=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^1+\left.\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\right\|_1^2=\frac{1}{3}+$ $+\left(4-\frac{4}{2}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6},$ $S=\frac{5}{6}$ (кв.ед.)

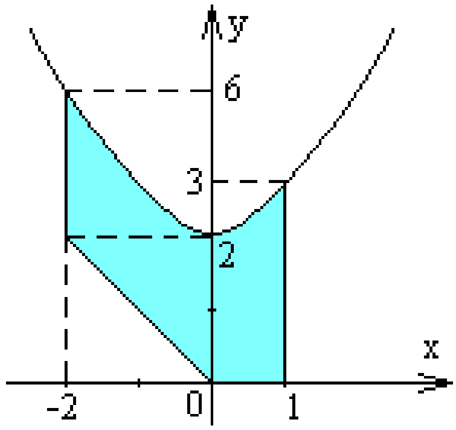
Примеры. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=x^2, y=0, x=2$; 2) $y=x^2, y=1$; 3) $y=-x^2+1, y=0$; 4) $y=1+x^2, y=2$; 5) $y=e^x, y=0, x=0, x=1$; 6) $y=x^3, y=\sqrt{x}$; 7) $y=2x-x^2, y=\frac{3}{4}$; 8) $y=x^3, y=1, x=2$; 9) $y=\frac{5}{x}, y=6-x$.

Решить самостоятельно: 

Вариант 1.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 3x + 4, \quad y = x + 1$.
2. *Выберите правильный вариант ответа.*
   Площадь фигуры, изображенной на рисунке, вычисляется по формуле:



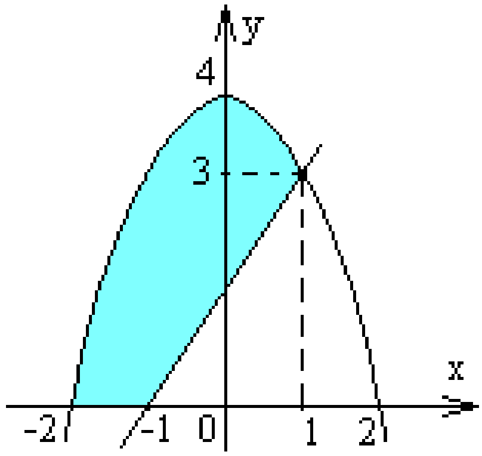
а) $S = \int\limits_{-2}^{2} \left(x^2 - 2\right)dx - 2$;

б) $S = \int\limits_{-1}^{1} \left(x^2 + 2\right)dx + 2$;

в) $S = \int\limits_{-2}^{1} \left(x^2 + 2\right)dx - 2$.

Вариант 2.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 0{,}5x^2 - 2x + 3, \quad y = 7 - x$.
2. *Выберите правильный вариант ответа.*
   Площадь фигуры, изображенной на рисунке, вычисляется по формуле:



а) $S = \int\limits_{-2}^{1} \left(x^2 + 4\right)dx - 3$;

б) $S = \int\limits_{-2}^{2} \left(-x^2 + 4\right)dx + 3$;

в) $S = \int\limits_{-2}^{1} \left(4 - x^2\right)dx - 3$.

Вариант 3.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = (x-2)^2, \quad y = 4 - x^2$.
2. *Выберите правильный вариант ответа*. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x-1}, \quad y = 2, \quad y = 0, \quad x = 0$, равна:
   а) $4\frac{2}{3}$; б) 4; в) $3\frac{1}{3}$.

Вариант 4.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2x + 2, \quad y = 2 + 4x - x^2$.

2. *Выберите правильный вариант ответа*. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x+1},\ \ y=2,\ \ y=0,\ \ x=-2$, равна:

а) $4\frac{1}{3}$; б) $3\frac{2}{3}$; в) $4\frac{2}{3}$.

Вариант 5.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2x + 4,\quad y = 3,\quad x = -1.$
2. *Выберите правильный вариант ответа*. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^{2x},\ \ y=0,\ \ x=0,\ \ x=a\ \ (a>0)$, равна $\frac{e-1}{2}$, если, a равно:

а) $\frac{e}{2}$; б) 0,5; в) $\frac{1}{2e}$.

Вариант 6.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 4x - x^2,\quad y = 4 - x$.
2. *Выберите правильный вариант ответа*. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2e^{0,5x},\ \ y=0,\ \ x=0,\ \ x=b\ \ (b>0)$, равна $4e^2-4$, если b равно:

а) $2e$; б) 4; в) $\frac{4}{e}$.

Вариант 7.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 6 + x - x^2,\quad y = 6 - 2x$.
2. *Выберите правильный вариант ответа*. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2-|x|,\ \ y=x^2$, равна:

а) $2\frac{5}{6}$; б) $1\frac{2}{3}$; в) $2\frac{1}{3}$.

Самостоятельная работа № 33 по теме «Элементы теории вероятности»

Тема: *использование элементов теории вероятностей при решении практических задач.*

Цель: научиться находить вероятность того или иного события, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины Х и применять полученные знания при решении практических задач.

Теоретический материал

Вероятностью события А называется отношение числа **m**благоприятствующих этому событию исходов к общему числу **n**всех равновозможных исходов испытания: **P(A)** $=\frac{m}{n}$**.**

Дискретной случайной величиной называется такая величина, число возможных значений которой либо конечное, либо бесконечное счётное множество, т. е. множество, элементы которого могут быть пронумерованы.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X с законом распределения:

X	X_1	X_2	…	X_i	…	x_n
p	**Pi**	P2	…	Pi	…	Pп

называется число $\mathbf{M(X) = x_1 p_1 + x_2\, p_2 + \ldots + x_n p_n}$.

Дисперсией случайной величины (степенью рассеяния значений случайной величины относительно центра, т.е. математического ожидания) называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания

$$\mathbf{D(X) = M\,(X - M\,(X\,)\,)^2} \text{ или } \mathbf{D(X) = M\,(X^2) - M^2(\,X\,)}\,.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется величина $\sigma = \sqrt{\boldsymbol{D(X)}}$**.** Она характеризует примерный размах самого отклонения.

При нахождении дисперсии и среднего квадратического отклонения дискретной случайной величины:

1) задать закон распределения этой величины (составить таблицу):

X	x1	x2	…	x_i	…	x_n
p	**Pi**	P2	…	*Pi*	…	*Pn*

где **X;** - возможные значения случайной величины, p_t- их вероятности ;

2) найти математическое ожидание M(X) дискретной случайной величины X по формуле: $M(X) = x_1 p_1 + x_2\, p_2 + \ldots + x_n p_n$;

3) найти дисперсию дискретной случайной величины по формуле: $D(X) = M\,(\,X - M\,(\,X\,)\,)^2$ или $D(X) = M\,(X^2) - M^2\,(X)$;

4) найти среднее квадратическое отклонение случайной величины по формуле: $\sigma = \sqrt{\boldsymbol{D(X)}}$

Примеры:

1. Дискретная случайная величина распределена по закону:

X	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти D (X).

Решение.

Сначала находим

M (X) = -1 • 0,2 + 0 • 0,1 + 1 • 0,3 + 2 • 0,4 = 0,9 ,

а затем

M (X^2) = 1 • 0,2 + 0 • 0,1 + 1 • 0,3 + 4 • 0,4 = 2,1;

D (X) = M (X^2) - M^2 (X) = 2,1 - 0,81 = 1,29.

2. Вероятность того, что расход электроэнергии в колледже в течение одних суток не превысит установленной нормы, равна p = 0,85. Найти вероятность того, что в ближайшие 25 суток расход электроэнергии в течение 20 суток не превысит нормы.

Решение.

Так как вероятность нормального расхода электроэнергии на протяжении каждых из 25 суток постоянна и равна p = 0,85, то вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна q = 1 - p = 1- 0,85 = 0,15.

По формуле Бернулли $P_{m\,n} = C_n^m\ p^n q^{n\text{-}m}$

находим искомую вероятность:

$P_{20,25}= C_{25}^{20} p^{20} q^{25\text{-}20} = C_{25}^{5} (0,85)^{20} \cdot (0,15)^5 \approx 0,156$.

	1				2				3			
1	X	-1	0	2	X	1	0	2	X	1	0	2
	p	0,2	0,1	0,15	p	0,2	0,6	0,14	p	0,7	0,3	0,14
2	X	1	0	2	X	-1	0	2	X	-1	0	2
	p	0,3	0,1	0,15	p	0,3	0,6	0,15	p	0,8	0,5	0,15
3	X	-1	0	2	X	-1	0	2	X	-1	0	2
	p	0,4	0,2	0,12	p	0,7	0,1	0,12	p	0,3	0,2	0,17
4	X	1	0	2	X	1	0	2	X	1	0	2
	p	0,2	0,5	0,12	p	0,7	0,4	0,11	p	0,2	0,6	0,14

 **Задания для самостоятельной работы**

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Тема: №34 Повторение. Подготовка к экзамену
Домашняя контрольная работа №20

Цель: Контроль знаний учащихся

Вариант 1

1. Отрезок AB имеет с плоскостью α единственную общую точку А. Точка С делит его в отношении 3:1, считая от точки А. Через точки С и В проведены параллельные прямые, пресекающие плоскость α соответственно в точках C_1 и B_1. Длина отрезка AC_1 равна 16 см. Найдите длину отрезка AB_1.
2. Ромб со стороной 12 мс и острым углом 60^0 вращается около стороны. Найдите объем тела вращения.
3. Решить уравнение: $2sin^2x - 3cosx - 3 = 0$
4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x - y = 5 \\ \log_5(4x + y) = 2 \end{cases}$
5. Найдите угловой коэффициент касательной. Проведенной к графику функции
6. $f(x) = 2x^3 - x + 3$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.
7. Решить уравнение: $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) - \log_{\frac{1}{2}} 16 = 5$
8. Решите уравнение: $\cos(3\pi + x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$
9. Найдите все первообразные функции: $f(x) = x^5 - x^2 - sin3x$
10. Радиус основания цилиндра равен 4 см, площадь боковой поверхности вдвое больше площади основания. Найти объем цилиндра.
11. Найдите область определения: $y = lg\frac{4-5x}{x-3}$.

Вариант 2

1. Отрезок AB имеет с плоскостью α единственную общую точку А. Точка С делит его в отношении 3:2, считая от точки А. Через точки С и В проведены параллельные прямые, пресекающие плоскость α соответственно в точках C_1 и B_1. Длина отрезка AC_1 равна 15 см. Найдите длину отрезка AB_1.
2. Ромб со стороной 18 мс и острым углом 60^0 вращается около стороны. Найдите объем тела вращения.
3. Решить уравнение: $2sin^2x + cos^2x - 3sinx - 5 = 0$
4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x - y = 4 \\ \log_4(3x + y) = 2 \end{cases}$

5. Найдите угловой коэффициент касательной. Проведенной к графику функции
6. $f(x) = 4x^2 + 7x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.
7. Решить уравнение: $\log_{\frac{1}{2}}(3x + 2) - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64} = 2$
8. Решите уравнение: $\sin(\pi + x) + \cos(\frac{3\pi}{2} - x) = \sqrt{2}$
9. Найдите все первообразные функции: $f(x) = x^7 - x^9 - cos5x$
10. Радиус основания цилиндра равен 3 см, площадь боковой поверхности втрое больше площади основания. Найти объем цилиндра.
11. Найдите область определения: $y = lg\frac{3-2x}{x+1}$.

Вариант 3

1. Отрезок AB имеет с плоскостью α единственную общую точку А. Точка С делит его в отношении 2:3, считая от точки А. Через точки С и В проведены параллельные прямые, пресекающие плоскость α соответственно в точках C_1 и B_1. Длина отрезка AC_1 равна 20 см. Найдите длину отрезка AB_1.
2. Ромб со стороной 24 мс и острым углом 60^0 вращается около стороны. Найдите объем тела вращения.
3. Решить уравнение: $sin^2x + 2cos^2x - 5cosx - 7 = 0$
4. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x + y = 17 \\ \log_3(3x + y) = 3 \end{cases}$
5. Найдите угловой коэффициент касательной. Проведенной к графику функции
6. $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$.
7. Решить уравнение: $\log_2(5 - 2x) + \log_2 8 = 4$
8. Решите уравнение: $\sin(\frac{3\pi}{2} + x) - \cos(2\pi - x) = 1$
9. Найдите все первообразные функции: $f(x) = x^3 - x^9 - cos4x$
10. Радиус основания цилиндра равен 6 см, площадь боковой поверхности в четыре раза больше площади основания. Найти объем цилиндра.
11. Найдите область определения: $y = lg\frac{7+2x}{x-5}$

Методические рекомендации по выполнению различных видов самостоятельной работы.

1. Методические рекомендации по составлению конспекта

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;
2. Выделите главное, составьте план;
3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;

4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.

5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

2. Методические рекомендации по выполнению практических занятий

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение ситуативных задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения ситуативных задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении поставленных задач нужно обосновывать каждый этап действий, исходя из теоретических положений курса. Если обучающийся видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала решения поставленных задач составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками, инструкциями по выполнению.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный результат следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи.

3. Методические рекомендации по написанию контрольной работы

Контрольная работа — промежуточный метод проверки знаний обучающегося с целью определения конечного результата в обучении по данной теме или разделу.

Домашняя контрольная работа проводится по дисциплине. Она призвана систематизировать знания, позволяет повторить и закрепить материал. При ее выполнении обучающиеся ограничены во времени, могут использовать любые учебные пособия, консультации с преподавателем.

4. Методические рекомендации по составлению презентаций

Требования к презентации

На первом слайде размещается:

- ✓ название презентации;
- ✓ автор: ФИО, группа, название учебного учреждения (соавторы указываются в алфавитном порядке);
- ✓ год.

На втором слайде указывается содержание работы, которое лучше оформить в виде гиперссылок (для интерактивности презентации).

На последнем слайде указывается список используемой литературы в соответствии с требованиями, интернет-ресурсы указываются в последнюю очередь.

Оформление слайдов	
Стиль	⏩ необходимо соблюдать единый стиль оформления; ⏩ нужно избегать стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; ⏩ вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки)
Фон	⏩ для фона выбираются более холодные тона (синий или зеленый)
Использование цвета	⏩ на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: один для фона, один для заголовков, один для текста; ⏩ для фона и текста используются контрастные цвета; ⏩ особое внимание следует обратить на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	⏩ нужно использовать возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде; ⏩ не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами; анимационные эффекты не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде
Представление информации	
Содержание информации	⏩ следует использовать короткие слова и предложения; ⏩ время глаголов должно быть везде одинаковым; ⏩ следует использовать минимум предлогов, наречий, прилагательных; ⏩ заголовки должны привлекать внимание аудитории
Расположение информации на странице	⏩ предпочтительно горизонтальное расположение информации; ⏩ наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; ⏩ если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней.

Шрифты	⏩ для заголовков не менее 24; ⏩ для остальной информации не менее 18; ⏩ шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; ⏩ нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; ⏩ для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание того же типа; ⏩ нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже, чем строчные).
Способы выделения информации	Следует использовать: ⏩ рамки, границы, заливку ⏩ разные цвета шрифтов, штриховку, стрелки ⏩ рисунки, диаграммы, схемы для иллюстрации наиболее важных фактов
Объем информации	⏩ не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации: люди могут единовременно запомнить не более трех фактов, выводов, определений. ⏩ наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отражаются по одному на каждом отдельном слайде.
Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: с текстом, с таблицами, с диаграммами.

5. Методические рекомендации по составлению кроссвордов

В процессе работы обучающиеся:

– просматривают и изучают необходимый материал, как в лекциях, так и в дополнительных источниках информации;
– составляют список слов раздельно по направлениям;
– составляют вопросы к отобранным словам;
– проверяют орфографию текста, соответствие нумерации;
– оформляют готовый кроссворд.

Общие требования при составлении кроссвордов:

– Не допускается наличие "плашек" (незаполненных клеток) в сетке кроссворда;
– Не допускаются случайные буквосочетания и пересечения;
– Загаданные слова должны быть именами существительными в именительном падеже единственного числа;
– Двухбуквенные слова должны иметь два пересечения;
– Трехбуквенные слова должны иметь не менее двух пересечений;
– Не допускаются аббревиатуры (ЗиЛ и т.д.), сокращения (детдом и др.);
– Не рекомендуется большое количество двухбуквенных слов;
– Все тексты должны быть написаны разборчиво, желательно отпечатаны.

Требования к оформлению:

– На каждом листе должна быть фамилия автора, а также название данного кроссворда;

– Рисунок кроссворда должен быть четким;
– Сетки всех кроссвордов должны быть выполнены в двух экземплярах:
  1-й экз. - с заполненными словами;
  2-й экз. - только с цифрами позиций.

Ответы публикуются отдельно. Ответы предназначены для проверки правильности решения кроссворда и дают возможность ознакомиться с правильными ответами на нерешенные позиции условий, что способствует решению одной из основных задач разгадывания кроссвордов — повышению эрудиции и увеличению словарного запаса.

Критерии оценивания составленных кроссвордов:

1. Четкость изложения материала, полнота исследования темы;
2. Оригинальность составления кроссворда;
3. Практическая значимость работы;
4. Уровень стилевого изложения материала, отсутствие стилистических ошибок;
5. Уровень оформления работы, наличие или отсутствие грамматических и пунктуационных ошибок;
6. Количество вопросов в кроссворде, правильное их изложения.

6. Методические рекомендации по оформлению рефератов

Титульный лист.

План работы оформляется с названием «Оглавление»; расположение – по центру.
Список библиографических источников оформляется под заголовком «Литература». Список литературы должен включать все использованные источники: сведения о книгах (монографиях, учебниках, пособиях, справочниках и т.д.) должны содержать: фамилию и инициалы автора, заглавие книги, место издания, издательство, год издания. При наличии трех и более авторов допускается указывать фамилию и инициалы только первого из них со словами «и др.». Наименование места издания надо приводить полностью в именительном падеже: допускается сокращение названия только двух городов: Москва (М.) и Санкт Петербург (СПб.). Приведенные библиографические источники должны быть отсортированы в алфавитном порядке по возрастанию. Список должен состоять не менее чем из трех источников.

Каждая новая часть работы, новая глава, новый параграф начинается с последующей страницы.

Приложение оформляются на отдельных листах, каждое приложение имеет порядковый номер и тематический заголовок. Надпись «Приложение» 1 (2.3...) оформляется в правом верхнем углу. Заголовок приложения оформляется как заголовок параграфа.

Объем работы не менее 10 листов напечатанных на компьютере (машинке) страниц; оглавление, список литературы и приложения не включаются в указанное количество страниц.

Текст рукописи печатается шрифтом № 14, с интервалом - 1,5.

Поля: слева - 3 см, справа - 1 см, сверху и снизу - 2 см.

Красная строка - 1,5 см . Межабзацный интервал – 1,8.

Название «Оглавление», «Введение», «Заключение», «Приложение», «Литература», а также заголовки глав и параграфов выделяются одинаковым темным, жирным шрифтом.

После цитаты в тексте работы используются знаки: «...», [1, С. 10], где номер библиографического источника берется из списка использованной литературы.

Обращение к тексту приложения оформляется следующим образом: (см. Приложение 1).

Оформление схем алгоритмов, таблиц и формул. Иллюстрации (графики, схемы, диаграммы) могут быть в основном тексте реферата и в разделе приложений. Все иллюстрации именуются рисунками. Все рисунки, таблицы и формулы нумеруются арабскими цифрами и имеют сквозную нумерацию в пределах приложения. Каждый рисунок должен иметь подпись. Например:

Рис.12. Форма главного окна приложения.

На все рисунки, таблицы и формулы в работе должны быть ссылки в виде: «форма главного окна приложения приведена на рис. 12.».

Рисунки и таблицы должны размещаться сразу после той страницы, на которой в тексте записки она упоминается в первый раз. Если позволяет место, рисунок (таблица) может размещаться в тексте на той же странице, где на него дается первая ссылка.

Если рисунок занимает более одной страницы, на всех страницах, кроме первой, проставляется номер рисунка и слово «Продолжение». Например:

Рис. 12. Продолжение

Рисунки следует размещать так, чтобы их можно было рассматривать без поворота записки. Если такое размещение невозможно, рисунки следует располагать так, чтобы для их просмотра надо было бы повернуть работу по часовой стрелке.

Схемы алгоритмов должны быть выполнены в соответствии со стандартом ЕСПД. Толщина сплошной линии при вычерчивании схем алгоритмов должна быть в пределах от 0,6 до 1,5 мм. Надписи на схемах должны быть выполнены чертежным шрифтом. Высота букв и цифр должна быть не менее 3,5 мм.

Номер таблицы размещается в правом верхнем углу над заголовком таблицы, если он есть. Заголовок, кроме первой буквы, выполняется строчными буквами. В аббревиатурах используются только заглавные буквы. Например: ПЭВМ.

Ссылки на таблицы в тексте пояснительной записки должны быть в виде слова табл. и номера таблицы. Например: Результаты тестов приведены в табл. 4.

Номер формулы ставится с правой стороны страницы в круглых скобках на уровне формулы. Например: z:=sin(x)+cos(y); (12).

Ссылка на номер формулы дается в скобках.

Например: расчет значений производится по формуле (12).

Нумеровать страницы работы по книжному варианту: печатными цифрами, в нижнем правом углу страницы, начиная с текста «Введения» (с. 3). Работа нумеруется сквозно, до последней страницы.

В оглавлении указываются начальные страницы всех частей и параграфов работы (название главы отдельной страницы не имеет), кроме списка литературы и приложений (в тексте нумеруются).

Пишется слово «глава», главы нумеруются римскими цифрами, параграфы - арабскими, знак ; не пишется; части работы «Введение». «Заключение», «Литература» нумерации не имеют.

Названия глав и параграфов пишутся с красной строки.

Заголовки «Введение», «Заключение», «Литература» пишутся посередине, вверху листа, без кавычек, точка не ставится.

Объем введения и заключения работы - 1,5-2 страницы печатного текста.

Работа должна быть прошита.

В работе используются три вида шрифта: 1 - для выделения названий глав, заголовков «Оглавление», «Литература», «Введение», «Заключение»; 2 - для выделения названий параграфов; 3 - для текстовки.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ СООБЩЕНИЙ

- ✓ Текст сообщения распечатать на бумаге формата А4.
- ✓ По всем сторонам листа оставить поля от края листа. Размеры: левого поля - 20 мм; правого поля - 10 мм; верхнего поля - 15 мм; нижнего поля - 15 мм.
- ✓ Использовать шрифт Times New Roman. Цвет шрифта должен быть чёрным, кегль – 12 пт. Можно использовать компьютерные возможности акцентирования внимания на определённых терминах, применяя различные способы начертания.
- ✓ Заголовки следует располагать в середине строки без точки в конце и печатать прописными буквами, не подчеркивая.
- ✓ Для абзацев, не являющихся заголовками, установить отступ первой строки на 12,5 мм и выравнивание – по ширине. Расстояние между абзацами – 3 пт.
- ✓ Если в сообщении более одной страницы, то страницы следует нумеровать арабскими цифрами.
- ✓ Обязательно напечатать список использованных источников (название статей, сайтов, или др. и адреса Web-страниц). В сообщении должны быть ссылки на используемую литературу.
- ✓ Не забудьте подписать сообщение (указать фамилию, имя учащегося, подготовившего сообщение).

1.

Основное требование к содержанию: **сообщение должно быть информативно и интересно** для большинства одноклассников

Требования к оформлению докладов

Формат:

- документ MS Word версии не ниже 2000 (с расширением doc);
- универсальный текстовый формат (с расширением rtf).

Страница Формат страницы А4 (210х297 мм), портретная ориентация.

Поля Верхнее 25 мм, нижнее 25 мм, левое 30 мм, правое 20 мм.

Текст Основной текст доклада печатается 11-м кеглем, шрифт Times New Roman.

Выравнивание по ширине страницы.

Межстрочный интервал — одинарный.

Отступы и переносы в словах не допускаются.

Отступ с новой строки 1,25 мм.

Рисунки Рисунки могут быть выполнены в любом графическом редакторе, совместимом с MS Word. Шрифт текста внутри рисунка из стандартного набора Windows. Рекомендуется Arial или Times New Roman. Рисунки должны быть вставлены в текст и расположены по центру страницы. Рисунки ограничиваются от текста пустой строкой.

Литература:

1. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия 10 класс (Книга 1) Колягин Ю.М. и др.. – М., 2020.
2. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия 11 класс (Книга 2) Колягин Ю.М. и др.. – М., 2020.
3. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия (базовый и углубленный уровни). 10—11 классы. — М., 2021.
4. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) /А.Г. Мордкович. – 11-е изд. Стер. – М.: Мнемозина, 2019.
5. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2ч. Ч.2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / [А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. – 11-е изд. Стер. – М.: Мнемозина, 2015.
6. Севрюков П.Ф. Тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства; учебное пособие /П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков. – М.: Илекса; Народное образование; Ставрополь; Сервисмаш, 2008.
7. Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену. - М.: Рольф, 1997.
8. Шабунин М.И. Математика для поступающих в вузы. Уравнения и системы уравнений. - М.: Аквариум, 1997.

7. Шабунин М.И. Математика для поступающих в вузы. Неравенства и системы неравенств.-М.: Аквариум, 1997.

Интернет - ресурсы

1. http://catalog.alledu.ru/predmet/math/
2. Учебно-информационные комплексы по математике для средних школ: http://mschool.kubsu.ru/uik/index.htm
3. Сайт-справочник правил, формул и теорем по математике: http://matemathik.narod.ru/
4. Мир Геометрии: http://geometr.info/
5. Страна Математика: http://www.bymath.net/
6. Научно-популярный физико-математический журнал "Квант" (статьи по математике):http://kvant.mirror1.mccme.ru/rub/1.htm
7. Графики функций" Небольшой сайт в помощь школьнику, изучающему графики функций: определения, примеры, задачник: http://graphfunk.narod.ru/
8. Виртуальная школа юного математика http://math.ournet.md/indexr.html