Областное государственное автономное
профессиональное образовательное учреждение
“Алексеевский агротехнический техникум”

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

2023г.

Самостоятельная работа №1

Решение домашней контрольной работы по теме

«Вычисление определителей второго и третьего порядков»

1 вариант

Вычислите определители:

$$1)\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad 2)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad 3)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \quad 4)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad 5)\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 4 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

2 вариант

Вычислите определители:

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 3 & 12 & 15 \end{vmatrix} \quad 2)\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix} \quad 3)\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 4 & -8 & 2 \\ 10 & 1 & -5 \end{vmatrix} \quad 4)\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad 5)\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Самостоятельная работа №2

Выполнение домашней контрольной работы по теме

«Матрицы и действия над ними»

1 вариант

Выполните действия:

$$1)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2)\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}^2$$

$$3)\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2 вариант

Выполните действия:

$$1)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2$$

$$2)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}^2$$

$$3)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Самостоятельная работа №3

Выполнение домашней контрольной работы по теме

«Вычисление обратной матрицы»

1 вариант

Вычислите обратную матрицу системы:

$$1)\ \begin{cases} 2x - y + 4z = 15 \\ 3x - y + z = 8 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = -5 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} x + 6y - 2z = 17 \\ 4x - y + 5z = -21 \\ x + 3y - z = 8 \end{cases}$$

2 вариант

Вычислите обратную матрицу системы:

$$1)\ \begin{cases} 3x - y + z = -2 \\ 3y - 2z = 12 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} 3x + 2y + z = -2 \\ 2x + y + 6z = 9 \\ 4x + 2z = 6 \end{cases}$$

Самостоятельная работа №4

Выполнение домашней контрольной работы по теме

«Решение систем линейных уравнений методом Крамера»

1 вариант

Решите систему методом Крамера:

$$1)\ \begin{cases} 2x - 7y + 5z = 9 \\ x + 5y - 5z = -2 \\ 4x - 2y + 7z = 24 \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \\ 2x + 7y - 5z = 13 \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases}$$

2 вариант

Решите систему методом Крамера:

$$1)\ \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \\ y + z = 2 \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x + 3y + 4z = 17 \\ 2x - 3y + 5z = 16 \\ 3x + 4y - z = 7 \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} 2x + 2y - 4z = 6 \\ x + 3y - 5z = 6 \\ 3x - 2y + 6z = 6 \end{cases}$$

Самостоятельная работа №5

Выполнение домашней контрольной работы по теме

«Решение систем линейных уравнений методом Гаусса»

1 вариант

Решите систему методом Гаусса:

$$1)\ \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 22 \\ x - 3y - 6z = -9 \\ 2x + 4y - 4z = 10 \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} 2x - y - z = 14 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$$

2 вариант

Решите систему методом Гаусса:

1) $\begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -4 \\ x + 3y - z = 11 \\ x - 2y + 2z = -7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 7 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$

Самостоятельная работа №6

Выполнение домашней контрольной работы по теме

«Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы»

1 вариант

Решите систему с помощью обратной матрицы:

1) $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 12 \\ 3x + 4y - 2z = 6 \\ 2x - y - z = -9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 3 \\ x + y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y - z = 10 \end{cases}$

2 вариант

Решите систему с помощью обратной матрицы:

1) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2 \\ 4x - 5y + 2z = 1 \\ 5x - 6y + 4z = 3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = 8 \\ 2x + 4y - 5z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$

Самостоятельная работа №7

Работа с дополнительной литературой по теме:

«История возникновения комплексных чисел»

Древнегреческие математики считали “настоящими” только натуральные числа. Постепенно складывалось представление о бесконечности множества натуральных чисел.
Наряду с натуральными числами применяли дроби - числа, составленные из целого числа долей единицы. В практических расчетах дроби применялись за две тысячи лет до н. э. в древнем Египте и древнем Вавилоне. Долгое время полагали, что результат измерения всегда выражается или в виде натурального числа, или в виде отношения таких чисел, то есть дроби. Древнегреческий философ и математик Пифагор учил, что “… элементы чисел являются элементами всех вещей, и весь мир в челом является гармонией и числом. Сильнейший удар по этому взгляду был нанесен открытием, сделанным одним из пифагорейцев. Он доказал, что диагональ квадрата несоизмерима со стороной. Отсюда следует, что натуральных чисел и дробей недостаточно, для того чтобы выразить длину диагонали квадрата со стороной 1. Есть основание утверждать, что именно с этого открытия начинается эра теоретической математики: открыть существование несоизмеримых величин с помощью опыта, не прибегая к абстрактному рассуждению, было невозможно.

Следующим важным этапом в развитии понятия о числе было введение отрицательных чисел - это было сделано китайскими математиками за два века до н. э. Отрицательные числа применяли в III веке древнегреческий математик Диофант, знавший уже правила действия над ними, а в VII веке эти числа уже подробно изучили индийские ученые, которые сравнивали такие числа с долгом. С помощью отрицательных чисел можно было единым образом описывать изменения величин. Уже в VIII веке было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения - положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел квадратный корень извлекать нельзя: нет такого числа , чтобы .

На пути к комплексным числам

В 1494 году учёный, францисканский монах (Италия) Лука Пачиоло (1445 – 1514) напечатал в Венеции труд “ Сумма, арифметика, геометрия и пропорциональности” , который закончил выводом: “ Решение кубических уравнений вида x3 + px = q, p > 0, q > 0, столь же невозможно при современном состоянии науки, как и решение квадратуры круга циркулем и линейкой” .

Несмотря на это предупреждение, за решение кубического уравнения взялись одновременно сразу два математика, Джеронимо Кардано (1501 – 1576) из Милана и Николо Тарталья (1506 – 1559) из Вероны. Причём первый из них получил аналитический результат, решая квадратное уравнение.

Он поставил задачу: нарезать участок земли прямоугольной формы с площадью 40 кв. ед. и периметром 2p = 20 лин. ед. Решая систему, он пришёл к уравнению x2 - 10x + 40 = 0, корни которого не являются действительными числами. Кардано был удивлён таким

результатом, назвав число софистическим, добавив, что “ для осуществления таких действий нужна была бы новая арифметика, которая была бы настолько же утончённой, насколько бесполезной” , нужно только условиться действовать над такими выражениями по правилам обычной алгебры. Итальянский алгебраист Дж. Кардано в 1545 г. предложил ввести числа новой природы.

В 1572 году замечательный учёный из Болоньи Рафаэли Бомбелли (1530 – 1572) в своём труде “ Алгебра” показывает, что при некоторых операциях над новыми числами результатом является действительное число.

Только в X V I I I веке величайший математик Леонард Эйлер (1707 – 1783) в работе “ Введение в математический анализ” (1746) вводит обозначение мнимой единицы, взяв первую букву слова imaginei res (от названия введённого Р. Декартом (1596 – 1650)) и записывает свои знаменитые формулы: exi = cosx + isinx, e-xi = cosx – isinx.

Карл Гаусс (1777 – 1855), немецкий учёный, “ король математики” , впервые называет числа комплексными (от латинского c o m p l e k s – объединение), вводит обозначение a + b i и представляет их в виде точек плоскости.

В XVI веке в связи с изучением кубических уравнений оказалось необходимым извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. Эта формула безотказно действует в случае, когда уравнение имеет один действительный корень, а если оно имеет три действительных корня, то под знаком квадратного корня оказывалось отрицательное число. Получалось, что путь к этим корням ведет через невозможную операцию извлечения квадратного корня из отрицательного числа. Вслед за тем, как были решены уравнения 4-й степени, математики усиленно искали формулу для решения уравнения 5-й степени. Но Руффини (Италия) на рубеже XVIII и XIX веков доказал, что буквенное уравнение пятой степени нельзя решить алгебраически; точнее: нельзя выразить его корень через буквенные величины a, b, c, d, e с помощью шести алгебраических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).

В 1830 году Галуа (Франция) доказал, что никакое общее уравнение, степень которого больше чем 4, нельзя решить алгебраически. Тем не менее, всякое уравнение n-й степени имеет (если рассматривать и комплексные числа) n корней (среди которых могут быть и равные). В этом математики были убеждены еще в XVII веке (основываясь на разборе многочисленных частных случаев), но лишь на рубеже XVIII и XIX веков упомянутая теорема была доказана Гауссом.

Утверждение комплексных чисел в математике

Кардано называл такие величины “*чисто отрицательными*” и даже “*софистически отрицательными*”, считал их бесполезными и старался их не употреблять. В самом деле, с помощью таких чисел нельзя выразить ни результат измерения какой-нибудь величины, ни изменение какой-нибудь величины. Но уже в 1572 году вышла книга итальянского алгебраиста Р. Бомбелли, в которой были установлены первые правила арифметических операций над такими числами, вплоть до извлечения из них кубических корней. Название “*мнимые числа*” ввел в 1637 году французский математик и философ Р. Декарт, а в 1777 году один из крупнейших математиков XVIII века - Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова*imaginaire* (мнимый) для обозначения числа (мнимой единицы). Этот символ вошел во всеобщее употребление благодаря К. Гауссу . Термин “*комплексные числа*” так же был введен Гауссом в 1831 году. Слово комплекс (от латинского *complexus*) означает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений и т. д. Образующих единое целое.

В течение XVII века продолжалось обсуждение арифметической природы мнимых чисел, возможности дать им геометрическое обоснование.

Постепенно развивалась техника операций над мнимыми числами. На рубеже XVII и XVIII веков была построена общая теория корней n-ых степеней сначала из отрицательных, а за тем из любых комплексных чисел, основанная на следующей формуле английского математика А. Муавра (1707). С помощью этой формулы можно было так же вывести формулы для косинусов и синусов кратных дуг. Л. Эйлер вывел в 1748 году замечательную формулу, которая связывала воедино показательную функцию с тригонометрической. С помощью формулы Л. Эйлера можно было возводить число е в любую комплексную степень. Можно находить sin и cos от комплексных чисел, вычислять логарифмы таких чисел, то есть строить теорию функций комплексного переменного.

В конце XVIII века французский математик Ж. Лагранж смог сказать, что математический анализ уже не затрудняют мнимые величины. С помощью мнимых чисел научились выражать решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Такие уравнения встречаются, например, в теории колебаний материальной точки в сопротивляющейся среде. Еще раньше швейцарский математик Я. Бернулли применял комплексные числа для решения интегралов.

Хотя в течение XVIII века с помощью комплексных чисел были решены многие вопросы, в том числе и прикладные задачи, связанные с картографией, гидродинамикой и т. д., однако еще не было строго логического обоснования теории этих чисел. Поэтому французский ученый П. Лаплас считал, что результаты, полученные с помощью мнимых чисел, - только наведение, приобретающее характер настоящих истин лишь после подтверждения прямыми доказательствами.

“Никто ведь не сомневается в точности результатов, получаемых при вычислениях с мнимыми количествами, хотя они представляют собой только алгебраические формы иероглифы нелепых количеств” Л. Карно.

После создания теории комплексных чисел возник вопрос о существовании “гиперкомплексных” чисел - чисел с несколькими “мнимыми” единицами. Такую систему вида построил в 1843 году ирландский математик У. Гамильтон, который назвал их “кватернионами”. Правила действия над кватернионами напоминает правила обычной алгебры, однако их умножение не обладает свойством коммутативности (переместительности).

Большой вклад в развитие теории функций комплексного переменного внесли русские и советские ученые Н. И. Мусхелишвили занимался ее применениями к упругости, М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев - к аэро- и гидродинамике, Н. Н. Богомолов и В. С. Владимиров - к проблемам квантовой теории поля.

Самостоятельная работа №8

Выполнение домашней контрольной работы по теме

«Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме»

1. Выполните действия:

1) $(3+i)+(-3-8i)$; 2) $(5-4i)+(7+4i)$; 3) $(-6+2i)+(-6-2i)$; 4) $(0,2+0,1i)+(0,8-1,1i)$; 5) $(2-3i)+(5+6i)+(-3-4i)$; 6) $(1-i)-(7-3i)-(2+i)+(6-2i)$.

2. Вычислите:

1) $i^6+i^{20}+i^{30}+i^{36}+i^{54}$; 2) $i+i^2+i^3+i^4+i^5$; 3) $i+i^{11}+i^{21}+i^{31}+i^{41}$; 4) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4$; 5) $\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^5}$; 6) $\frac{1}{i^{13}}+\frac{1}{i^{23}}+\frac{1}{i^{33}}$.

3. Выполните действия:

1) $-i\sqrt{5}\cdot 4i\sqrt{5}$; 2) $(5-3i)\cdot 2i$; 3) $(3+4i)(3-4i)$; 4) $(5+3i)(2-5i)$; 5) $(-2-i)(1+i)$; 6) $4+2i+(-1+6i)(6-i)$; 7) $(3-2i)(5+4i)-7i+1$; 8) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i\right)$; 6) $(0,2-0,3i)(0,5+0,4i)$.

4. Выполните действия:

1) $\frac{1}{i}$; 2) $\frac{1}{1-i}$; 3) $\frac{1-i}{1+i}$; 4) $\frac{3-2i}{1+3i}$; 5) $\frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$; 6) $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$; 7) $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$; 8) $\frac{a+bi}{a-bi}$; 9) $\frac{(a+bi)(b+ai)}{b-ai}$; 10) $\frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}$; 11) $\frac{1-3i}{i-2}+\frac{4i+1}{3i-1}$; 12) $\frac{a+bi}{a-bi}-\frac{a-bi}{a+bi}$.

5. Разложите на комплексные множители:

1) m^2+n^2; 2) $4m^2+9n^2$; 3) $\frac{a^2}{9}+\frac{b^2}{16}$; 4) $m+n$; 5) $2+\sqrt{3}$; 6) $1+\sin^2\alpha$; 7) 3.

6. Вычислите:

1) $(1-i)^2$; 2) $(1+i)^7$; 3) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$; 4) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2$; 5) $(1+i)^{-2}$; 6) $(1-i)^{-3}$; 7) $\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)^{-8}$.

Самостоятельная работа №9

Выполнение домашней контрольной работы по теме

«Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме»

1. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа:

1) $3i$; 2) $-1+i$; 3) $1-i\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3}-i$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)i$; 6) $-3+4i$.

2. Представьте в алгебраической форме числа:

1) $5\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$; 2) $4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$; 3) $\cos\pi+i\sin\pi$; 4) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$; 5) $3(\cos 0+i\sin 0)$.

2. Найдите произведения:

1) $3\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]\cdot\left[\cos\left(\frac{5\pi}{24}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{24}\right)\right]$;

2) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot 5\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$;

3) $(\cos 5+i\sin 5)\cdot(\cos 2+i\sin 2)$;

4) $\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$;

5) $4(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)\cdot 2(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ)$;

6) $\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]\cdot\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$.

3. Выполните умножение, используя тригонометрическую форму комплексного числа:

1) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{i\sqrt{6}}{6}\right)$;

2) $(1+i\sqrt{3})(-2-2i\sqrt{3})$;

3) $(1+i)(3+3i\sqrt{3})$;

4) $(6+2i\sqrt{3})(-3-3i)$;

5) $(5+5i)(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$;

6) $3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right]\cdot(3+\sqrt{3}i)$.

4. Выполните деление в тригонометрической форме:

1) $3\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]:\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$;

2) $(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ):(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$;

3) $\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]:\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$;

4) $(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ):[\cos(-120^\circ)+i\sin(-120^\circ)]$.

5. Возведите в степень:

1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^6$; 2) $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right]^8$; 3) $(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ)^{-12}$.

6. Вычислите: 1) $(1-i)^{12}+(1+i)^{12}$; 2) $\frac{(1+i)^8-(1-i)^8}{(1+i)^8\cdot(1-i)^8}$.

7. Извлеките корни: 1) $\sqrt[3]{-1}$; 2) $\sqrt[4]{-1}$; 3) $\sqrt[3]{i}$; 4) $\sqrt[4]{4}$; 5) $\sqrt[4]{-2+2i\sqrt{3}}$; 6) $\sqrt[6]{1}$.

Самостоятельная работа №10

Выполнение домашней контрольной работы по теме

«Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме»

1. Найдите:

1) e^i; 2) $e^{i\pi}$; 3) e^{1+i}; 4) $e^{i\pi/2}$; 5) $e^{i\pi/3}$; 6) e^{4+3i}; 7) e^{2-i}; 8) e^{3i-2}.

2. Найдите:

1) $\sin i$; 2) $\cos(1+i)$; 3) $\sin(1-i)$.

3. Покажите, что для комплексного переменного z справедливы равенства:

$$\cos(-z)=\cos z;\ \sin(-z)=-\sin z;$$

$$\sin 3z = 3\sin z - 4\sin^3 z;\ \sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2};\ \cos^2 z = \frac{1+\cos 2z}{2}.$$

4. Представьте в показательной форме числа:

1) 1; 2) $\sqrt{3}+i$; 3) $3+i\sqrt{3}$; 4) $-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$.

5. Представив числа $z_1 = \sqrt{3} + i$ и $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ в показательной форме, вычислите:
1) $z_1 \cdot z_2$; 2) $\frac{z_1}{z_2}$; 3) z_2^4; 4) $\sqrt[3]{z_1}$; 5) $\sqrt[4]{z_2}$.

Самостоятельная работа №11

Работа с дополнительной литературой по теме

«Непрерывность функции. Точки разрыва функции».

Исследование функции на непрерывность связано с нахождением односторонних пределов функции. Так что рекомендую ознакомится с разделом Предел функции, основные определения и понятия, прежде чем двигаться дальше.

Определение непрерывности функции в точке.

Функция f(x) называется непрерывной в точке x_0, если предел слева равен пределу справа и совпадает со значением функции в точке x_0, то есть

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Следствие. *ЗНАЧЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ В ТОЧКАХ НЕПРЕРЫВНОСТИ СОВПАДАЕТ СО ЗНАЧЕНИЕМ ФУНКЦИИ В ЭТИХ ТОЧКАХ.*

Пример.

Доказать непрерывность функции в точке $f(x) = \frac{1}{6}(x-8)^2 - 8$ в точке $x_0 = 2$.

Решение.

Во-первых, покажем существование предела слева. Для этого возьмем последовательность аргументов x_n, сходящуюся к $x_0 = 2$, причем $x_n < 2$. Примером такой последовательности может являться $-2, 0, 1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, 1\frac{15}{16}, \ldots, 1\frac{1023}{1024}, \ldots \to 2$

Соответствующая последовательность значений функции будет иметь вид

$$f(-2); f(0); f(1); f\left(1\frac{1}{2}\right); f\left(1\frac{3}{4}\right); f\left(1\frac{7}{8}\right); f\left(1\frac{15}{16}\right); \ldots; f\left(1\frac{1023}{1024}\right); \ldots =$$

$$= 8.667; 2.667; 0.167; -0.958; -1.489; -1.747; -1.874; \ldots; -1.998; \ldots \to -2$$

На рисунке соответствующие значения показаны зелеными точками.

Легко видеть, что эта последовательность сходится к -2, поэтому

$$\lim_{x \to 2-0}\left(\frac{1}{6}(x-8)^2 - 8\right) = -2.$$

Во-вторых, покажем существование предела справа. Для этого возьмем последовательность аргументов x_n, сходящуюся к $x_0 = 2$, причем $x_n > 2$. Примером такой последовательности может являться $6, 4, 3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{8}, 2\frac{1}{16}, \ldots, 2\frac{1}{1024}, \ldots \to 2$

Соответствующая последовательность значений функции будет иметь вид

$$f(6); f(4); f(3); f\left(2\frac{1}{2}\right); f\left(2\frac{1}{4}\right); f\left(2\frac{1}{8}\right); f\left(2\frac{1}{16}\right); \ldots; f\left(2\frac{1}{1024}\right); \ldots =$$

$$= -7.333; -5.333; -3.833; - -2.958; 2.489; -2.247; -2.124; \ldots; -2.001; \ldots \to -2$$

На рисунке соответствующие значения показаны синими точками.

Легко видеть, что эта последовательность также сходится к -2, поэтому

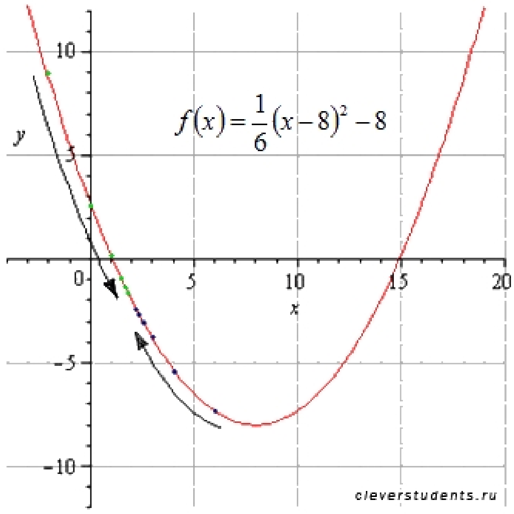
$$\lim_{x\to 2+0}\left(\frac{1}{6}(x-8)^2-8\right)=-2$$
.

Этим мы показали, что пределы слева и справа равны, следовательно, существует предел функции в точке , причем

Вычислив значение функции в точке $x_0=2$ можно говорить о выполнении равенства

$$f(x)=\frac{1}{6}(x-8)^2-8$$
, это доказывает непрерывность исходной функции в точке.

Графическая иллюстрация.



Определение устранимого разрыва первого рода.

В точке x_0 функция имеет устранимый разрыв первого рода, если предел слева равен пределу справа, но они не равны значению функции в точке ,то есть

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)\neq f(x_0)$$
.

Пример.

Найти точки разрыва функции и определить их тип $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x-5}$.

Решение.

Найдем область определения функции:

$$D(f(x))\Leftrightarrow D\left(\frac{x^2-25}{x-5}\right)\Leftrightarrow x-5\neq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;5)\cup(5;+\infty)$$

Точкой разрыва нашей функции может быть только граничная точка области определения, то есть $x_0=5$. Проверим функцию на непрерывность в этой точке.

На области определения выражение $\dfrac{x^2-25}{x-5}$ можно упростить:

$$\frac{x^2-25}{x-5}=\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=x+5$$

Находим пределы слева и справа. Так как функция $g(x)=x+5$ непрерывна при любом действительном x, то

$$\lim_{x\to 5-0}(x+5)=5+5=10$$

$$\lim_{x\to 5+0}(x+5)=5+5=10$$

Следовательно, пределы слева и справа равны, а сама функция $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ в точке $x_0=5$ не определена, поэтому, в точке функция имеет устранимый разрыв первого рода.

Определение неустранимого разрыва первого рода (точка скачка функции). В точке x_0 функция имеет неустранимый разрыв первого рода, если пределы слева и справа НЕ равны, то есть $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. Точку x_0 в этом случае называют точкой скачка функции.

Пример.

Исследовать кусочно-непрерывную функцию $f(x)=\begin{cases} x+4, x<-1, \\ x^2+2, -1\le x<1, \\ 2x, x\ge 1. \end{cases}$ на непрерывность, определить вид точек разрыва, сделать чертеж.

Решение.

Разрывы могут быть лишь в точках $x_0=-1$ или $x_0=1$.

Найдем пределы слева и справа от этих точек, а также значения исходной функции в этих точках.

Слева от точки $x_0=-1$ наша функция есть $f(x)=x+4$ и в силу непрерывности линейной функции $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1-0}(x+4)=-1+4=3$.

В самой точке $x_0=-1$ наша функция есть $f(x)=x^2+2$, поэтому $f(-1)=(-1)^2+2=3$. На промежутке $(-1;1)$ наша функция есть $f(x)=x^2+2$ и в силу непрерывности квадратичной функции

$$\lim_{x\to-1+0} f(x)=\lim_{x\to-1+0}(x^2+2)=(-1)^2+2=3$$

$$\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1-0}(x^2+2)=(1)^2+2=3$$

В точке $x_0=1$ наша функция есть $f(x)=2x$, поэтому $f(1)=2\cdot1=2$.

Справа от $x_0=1$ наша функция есть $f(x)=2x$ и в силу непрерывности линейной функции $\lim\limits_{x\to1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}(2x)=2\cdot1=2$

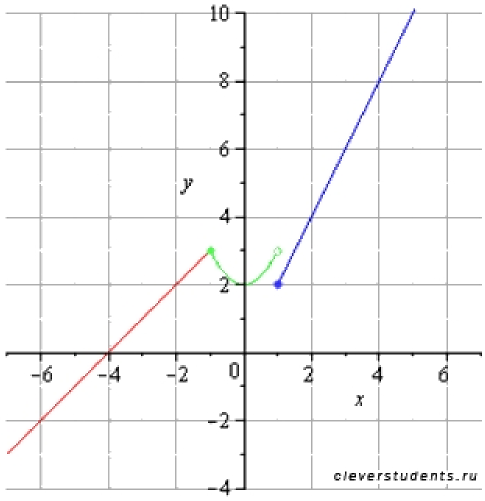
В итоге имеем: $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)=f(-1)=3$

следовательно, в точке $x_0=-1$ исходная кусочная функция непрерывна,

$\lim\limits_{x\to1-0} f(x)=3,\ \lim\limits_{x\to1+0} f(x)=2$

, то есть $\lim\limits_{x\to1-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to1+0} f(x)$, следовательно, в точке $x_0=1$ неустранимый разрыв первого рода (скачок).

Графическая иллюстрация.



Определение разрыва второго рода (бесконечный разрыв).

В точке x_0 функция имеет разрыв второго рода, если либо предел слева $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, либо предел справа $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, не существует или бесконечен.

Пример. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{1}{x}$ на непрерывность, определить вид точек разрыва, сделать чертеж.

Решение.

Областью определения функции является интервал $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

Найдем пределы функции слева и справа от точки $x_0=0$.

Рассмотрим произвольную последовательность значений аргумента, сходящуюся к $x_0=0$ слева. Например, $-8;-4;-2;-1;-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{4};\ldots;-\dfrac{1}{1024};\ldots$ и соответствующую ей последовательность значений функции

$$f(-8);f(-4);f(-2);f(-1);f\left(-\frac{1}{2}\right);f\left(-\frac{1}{4}\right);\ldots;f\left(-\frac{1}{1024}\right);\ldots=$$

$$=-\frac{1}{8};-\frac{1}{4};-\frac{1}{2};-1;-2;-4;\ldots;-1024;\ldots$$

Легко показать, что эта последовательность бесконечно большая отрицательная, поэтому,

$$\lim_{x\to0+0} f(x)=\lim_{x\to0+0}\frac{1}{x}=+\infty$$.

Рассмотрим произвольную последовательность значений аргумента, сходящуюся к $x_0=0$ справа. Например, $8;4;2;1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};\ldots;\dfrac{1}{1024};\ldots$ и соответствующую ей последовательность значений функции

$$f(8);f(4);f(2);f(1);f\left(\frac{1}{2}\right);f\left(\frac{1}{4}\right);\ldots;f\left(\frac{1}{1024}\right);\ldots=$$

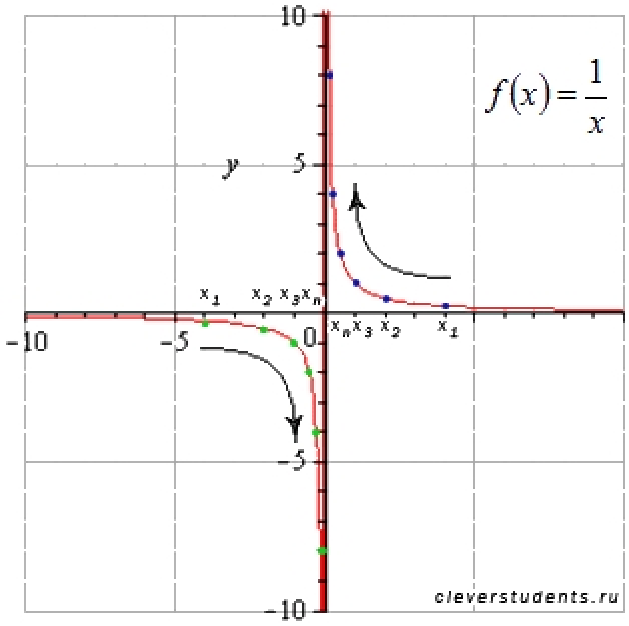
$$=\frac{1}{8};\frac{1}{4};\frac{1}{2};1;2;4;\ldots;1024;\ldots$$

Легко показать, что эта последовательность бесконечно большая положительная, поэтому,

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Следовательно, в точке $x_0 = 0$ функция имеет разрыв второго рода.

Графическая иллюстрация.



Самостоятельная работа №12

Решение домашней контрольной работы по теме

«Вычисление пределов последовательностей и функций»

Предел. Непрерывность

1. Найти пределы

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n-1}-\sqrt[3]{64n^3+3n}}{\sqrt[4]{n}+n}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+n+1}{(3n^2-1)^2-(3n^2+1)^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\arcsin(5x/7)}-1}{1-\cos\sqrt{x}}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-3n+2}-2n\right)$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!\,n}{(n+1)!-n!}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9^n-7^{n-1}}{3\cdot 7^n+4\cdot 9^{n+1}}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^3+3x-2}{(5x-4)(2x+1)^2}-3^{\frac{1}{x+2}}\right]$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x-4}{x^2-x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x(e^x-1)}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{5\,\mathrm{arctg}\,(x/3)}$

13. $\lim\limits_{x\to 0.5}\dfrac{\cos(\pi x)}{2x-1}$

14. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+6}{3x+11}\right)^{\frac{7}{x+3}}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+5}{2n-6}\right)^{\frac{n}{6}+1}$

2. Сравнить две бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to 0$, если

1) $\alpha(x)=x^2\sin x,\qquad \beta(x)=x\arcsin^2 2x$
2) $\alpha(x)=e^{\cos 3x}-e,\qquad \beta(x)=\mathrm{arctg}x$

3. Для данных бесконечно малых при $x\to x_0$ величин записать эквивалентнные в виде $A(x-x_0)^k$

1. $\ln(1-\sqrt[5]{x^2\cdot\mathrm{tg}\,\sqrt{x}}),\quad x_0=0$

2. $1-\cos\dfrac{3x}{7},\quad x_0=0$

3. $\sin^2\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right),\quad x_0=-\dfrac{\pi}{6}$

4. $\dfrac{(x^3-4x)^2}{3x+5},\quad x_0=2$

4. Исследовать на непрерывность функции

1. $y=\dfrac{x^2+3}{x^2-1}$

2. $y=1-5^{\frac{1}{7-x}}$

3. $y=\begin{cases}-2x, & x<-1\\ (x-1)^2, & -1\le x\le 4\\ \sqrt{8+2x}, & x>4\end{cases}$

Самостоятельная работа№13

Работа с дополнительной литературой по теме

«Применение производной к вычислению пределов. Правило Лопиталя»

Правило Лопиталя очень широко применяется для вычисления пределов, когда имеет место неопределенность вида ноль делить на ноль $\left\langle \frac{0}{0} \right\rangle$, бесконечность делить на бесконечность $\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$.

К этим видам неопределенностей сводятся неопределенности ноль умножить на бесконечность $\langle 0 \cdot \infty \rangle$ и бесконечность минус бесконечность $\langle \infty - \infty \rangle$.

Формулировка правила Лопиталя следующая: Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle \text{или} \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle$, и если функции f(x) и g(x) – дифференцируемы в окрестности точки x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

В случае, когда неопределенность не исчезает после применения правила Лопиталя, то его можно применять вновь.
Рассмотрим несколько примеров и подробно разберем решения.
Пример.

Вычислить предел, используя правило Лопиталя $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2(3x)}{x \cdot \cos(x)}$

Решение.

Подставляем значение $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2(3x)}{x \cdot \cos(x)} = \frac{\sin^2(3 \cdot 0)}{0 \cdot \cos(0)} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle$
Пределы с неопределенностью данного типа можно находить по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(3x)}{x \cdot \cos(x)} = \left\langle \frac{0}{0} \right\rangle = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sin^2(3x)\right)'}{\left(x \cdot \cos(x)\right)'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin(3x)(\sin(3x))'}{x' \cdot \cos(x) + x \cdot (\cos(x))'} = \lim_{x \to 0} \frac{6\sin(3x)\cos(3x)}{\cos(x) - x \cdot \sin(x)} =$$

$$= \frac{6\sin(3 \cdot 0)\cos(3 \cdot 0)}{\cos(0) - 0 \cdot \sin(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

Ответ: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2(3x)}{x \cdot \cos(x)} = 0$

Пример.

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}$

Решение.

Подставляем бесконечность $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\frac{\ln(\infty)}{\infty}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle$

Для данного типа неопределенностей можно использовать правило Лопиталя при нахождении предела. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln(x))'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{\infty}=0$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

Пример.

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(x^4\ln(x)\right)$

Решение.

Подставляем значение $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(x^4\ln(x)\right)=(0+0)^4\cdot\ln(0+0)=\langle 0\cdot(-\infty)\rangle$

Пришли к неопределенности вида ноль умножить на бесконечность. Обращаемся к таблице неопределенностей для выбора метода решения. Преобразуем выражение, чтобы можно было применить правило Лопиталя.

$$\lim\limits_{x\to 0+0}\left(x^4\ln(x)\right)=\langle 0\cdot(-\infty)\rangle=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\ln(x)}{x^{-4}}=\frac{\ln(0+0)}{(0+0)^{-4}}=\left\langle\frac{-\infty}{-\infty}\right\rangle$$

Пришли к неопределенности бесконечность делить на бесконечность, а значит, можно найти предел по правилу Лопиталя.

$$\lim\limits_{x\to 0+0}\left(x^4\ln(x)\right)=\langle 0\cdot(-\infty)\rangle=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\ln(x)}{x^{-4}}=\left\langle\frac{-\infty}{-\infty}\right\rangle=$$

$$=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{(\ln(x))'}{\left(x^{-4}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-4x^{-5}}=-\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x^{-4}}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(0+0)^{-4}}=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot(0+0)^4=0$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(x^4\ln(x)\right)=0$

Пример.

Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg^2(x)-\frac{1}{x^2}\right)$

Решение.

Подставляем значение $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg^2(x)-\frac{1}{x^2}\right)=\langle\infty-\infty\rangle$

Пришли к неопределенности бесконечность минус бесконечность. Преобразуем выражение, чтобы можно было применить правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}\left(ctg^2(x)-\frac{1}{x^2}\right)=\langle\infty-\infty\rangle=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos^2(x)-\sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)(x\cos x+\sin x)}{x^2\sin^2(x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(x\cos x-\sin x)}{x\sin^2(x)}\frac{(x\cos x+\sin x)}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(x\cos x-\sin x)}{x\sin^2(x)}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)}{x\sin^2(x)}=2\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)}{x\sin^2(x)}=$$

$$=2\frac{0\cdot\cos(0)-\sin(0)}{0\cdot\sin^2(0)}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle$$

Последний переход был сделан при использовании первого замечательного предела . Теперь можно найти предел по правилу Лопиталя.

$$2\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)}{x\sin^2(x)}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=2\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x\sin^2(x))'}=$$

$$2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin^2(x)+2x\sin x\cos x}=2\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sin(x)+2x\cos x}=$$

$$=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle$$

Неопределенность не исчезла, поэтому применим правило Лопиталя еще раз.

$$2\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sin(x)+2x\cos x}=\left\langle\frac{0}{0}\right\rangle=2\lim_{x\to 0}\frac{-x'}{(\sin(x)+2x\cos x)'}=$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x+2\cos x-2x\sin x}=$$

$$=-2\cdot\frac{1}{3\cdot\cos(0)-2\cdot 0\cdot\sin(0)}=-\frac{2}{3}$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg^2(x)-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{2}{3}$

Самостоятельная работа№14

Работа с дополнительной литературой по теме

«Выпуклые функции. Точки перегиба»

Дуга кривой называется *выпуклой*, если она пересекается с любой своей секущей не более, чем в двух точках.

На рис. а) – выпуклая дуга, б) – невыпуклая дуга.

Если дуга выпукла, то она целиком лежит по одну сторону от касательной проведенной в любой ее точке

Выпуклость дуги может быть направлена или вверх (в направлении оси *Oy*), или вниз

Линии, обращенные выпуклостью вверх, условились называть *выпуклыми*, а обращенные выпуклостью вниз – *вогнутыми*.

Необходимое условие выпуклости дуги: есть дуга линии *y=f(x)* выпукла на *(a, b),* то $f^{//}(x) < 0$ при $\forall x \in (a,b)$.

Необходимое условие вогнутости дуги: если дуга линии *y=f(x)* вогнута на *(a, b),*то $f^{//}(x) > 0$ при $\forall x \in (a,b)$.

Достаточное условие выпуклости, вогнутости дуги: если $f^{//}(x) < 0$ при $\forall x \in (a,b)$, то дуга кривой *y=f(x)* выпукла на *(a, b)*; если $f^{//}(x) > 0$ при $\forall x \in (a,b)$, то дуга кривой *y=f(x)* вогнута на *(a, b).*

Точка *C* линии, отделяющая выпуклую дугу от вогнутой или наоборот, называется ***точкой перегиба.***

Предполагается, что в точке перегиба можно провести касательную к данной линии, которая лежит при этом по обе стороны от касательной

Необходимое условие существования точки перегиба: если *C* точка перегиба кривой *y=f(x),* то $f^{//}(x) = 0$.

Слева от $x = x_0$ $f^{//}(x) < 0$, а справа $f^{//}(x) > 0$. Это значит, что слева функция $f^{/}(x)$ убывает, а справа возрастает. Интервалы монотонности меняются в точке, в которой производная функция равна нулю $\left[f^{/}(x)\right] = f^{//}(x_0) = 0$ или $f^{//}(x)$ не существует. Точка $x = x_0$ называется при этом *критической.*

Рассмотренное условие является лишь необходимым условием существования точки перегиба.

Например, если $y = x^4$, то $y^{//} = 12x^2 = 0$ при $x=0$ не существует точки перегиба.

Достаточное условие существования точки перегиба: если $f^{//}(x)$ меняет свой знак при переходе через критическую точку $x = x_0$, то точка $(x_0, f(x_0))$ - точка перегиба кривой $y = f(x)$. Знаки $f^{//}(x)$ слева и справа от $x = x_0$ показывают, как направлена выпуклость кривой при $x < x_0$ и $x > x_0$.

Самостоятельная работа№15

Решение домашней контрольной работы по теме

«Исследование функции и построение ее графика»

Исследовать функции и построить графики этих функций.

В1. *а)* $y = 3x^2 - 4x^4$; *б)* $y = \dfrac{3x^2 + 2x + 15}{x + 4}$;

В2. *а)* $y = x^4 - 2x^2 + 1$; *б)* $y = \dfrac{4x^2 + 3x + 15}{x + 5}$;

В3. *а)* $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 3x^3$; *б)* $y = \dfrac{x^2 - 3x - 6}{x + 2}$;

В4. *а)* $y = \dfrac{1}{5}x^5 - 3x^3 + 1$; *б)* $y = \dfrac{2x^2 + 4x + 2}{x + 3}$;

В5. *а)* $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2$; *б)* $y = \dfrac{2x^2 + 3x + 13}{x - 1}$;

В6. *а)* $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 5x^5$; *б)* $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$;

В7. *а)* $y = 3x^3 - 9x$; *б)* $y = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x + 4}$;

В8. *а)* $y = x^4 - 2x^2 + 2$; *б)* $y = \dfrac{3x \;\; - 2x^2 + 3}{x + 1}$;

В9. *а)* $y = 3x^3 - 36x$; *б)* $y = \dfrac{4x^2 + 6x}{x + 2}$;

В10. *а)* $y = x^6 - \dfrac{3x^4}{2}$; *б)* $y = \dfrac{4x - 0.5x^2}{x + 1}$;

В11. *а)* $y = 2x^3 - 6x + 1$; *б)* $y = \dfrac{8x - x^2 - 16}{x - 1}$;

В12. *а)* $y = 2x^4 - 8x + 1$; *б)* $y = -\dfrac{2x^2 + 3x + 13}{x - 1}$;

В13. *а)* $y = 2x^4 - 4x + 2$; *б)* $y = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 2}$;

В14. *а)* $y = 4x^4 - 2x^3 + 1$; *б)* $y = -\dfrac{x^2 - 3x - 3}{x + 1}$;

В15. *а)* $y = \dfrac{1}{7}x^7 - \dfrac{1}{4}x^4 + 2$; *б)* $y = \dfrac{3x - 2x^2}{x - 2}$;

В16. *а)* $y = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{4}{3}x^3 + 1$; *б)* $y = \dfrac{x^2 - 4x - 16}{x - 1}$;

В17. *а)* $y = 2x^3 - 4x^2 + 2$; *б)* $y = \dfrac{x^2 - 3x - 3}{x - 1}$;

В18. *а)* $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 1$; *б)* $y = \dfrac{x^2 - 3x - 6}{x + 1}$;

В19. *а)* $y = \dfrac{1}{6}x^6 - \dfrac{8}{3}x^3 + 2$; *б)* $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 16}{x + 4}$;

В20. *а)* $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$; *б)* $y = -\frac{3x - x^2}{x - 2}$.

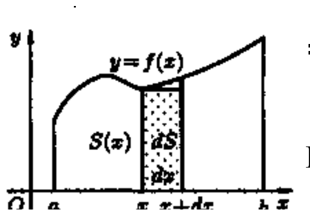
Самостоятельная работа№16

Работа с дополнительной литературой по теме

«Геометрические приложения определенного интеграла»

1.Вычисление площадей плоских фигур

Площадь криволинейной трапеции, расположенной «выше» оси абсцисс ($f(x) \geq 0$), равна соответствующему определенному интегралу:



$$= \int_a^b y\,dx. \qquad \mathbf{(41.1)}$$

Пример 1.Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

x = a cos t,

= b sin t.

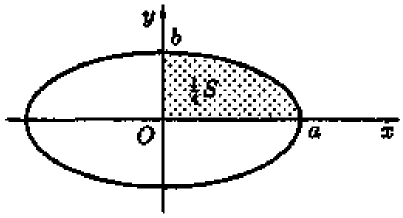


Рис. 179.

Решение: Найдем сначала 1/4 площади S. Здесь x изменяется от 0 до a, следовательно, t изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0 (см. рис. 179). Находим:

$$\frac{1}{4}S = \int_{\pi/2}^{0} b\sin t \cdot (-a\sin t)\,dt =$$

$$= -ab\int_{\pi/2}^{0} \sin^2 t\,dt = \frac{ab}{2}\int_{0}^{\pi/2} (1 - \cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

Таким образом $\frac{1}{4}S = \frac{\pi ab}{4}$. Значит, S = πaB.

2. Вычисление длины дуги плоской кривой

Пусть в прямоугольных координатах дана плоская кривая AB, уравнение которой $y=f(x)$, где $a \leq x \leq b$.

Под длиной дуги AB понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а длина наибольшего звена ее стремится к нулю. Покажем, что если функция y=f(x) и ее производная y' = f'(x) непрерывны на отрезке [a; b], то кривая AB имеет длину, равную

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.} \qquad (41.3)$$

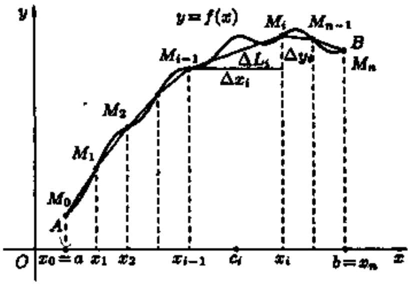


Рис. 183.

Пример 2. Найти длину окружности радиуса R.

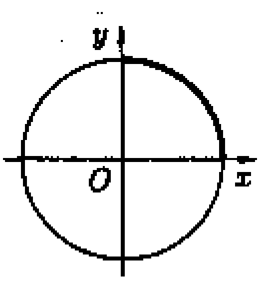


Рис. 184.

Решение: Найдем 1/4 часть ее длины от точки (0;R) до точки (R;0) (см. рис. 184). Так как $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, то

$$\frac{1}{4}l = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = R \cdot \arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R = R \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Значит, $l = 2\pi R$. Если уравнение окружности записать в параметрическом виде x=Rcost, y = Rsint ($0 \le t \le 2\pi$), то

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\,dt = Rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R.$$

3. Вычисление объема тела

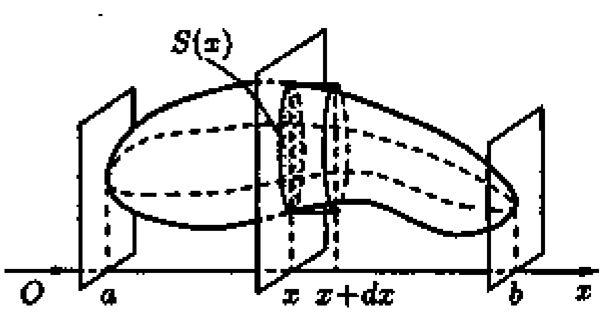


Рис. 188.

Пусть требуется найти объем V тела, причем известны площади S сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными некоторой оси, например оси Ox: S = S(x), $a \le x \le b$.

1. Через произвольную точку x є [a;b] проведем плоскость ∏, перпендикулярную оси Ox (см. рис. 188). Обозначим через S(x) площадь сечения тела этой плоскостью; S(x) считаем известной и непрерывно изменяющейся при изменении x. Через v(x) обозначим объем части тела, лежащее левее плоскости П. Будем считать, что на отрезке [a; x] величина v есть функция от x, т. е. v = v(x) (v(a) = 0, v(b) = V).

2. Находим дифференциал dV функции v = v(x). Он представляет собой «элементарный

слой» тела, заключенный между параллельными плоскостями, пересекающими ось Ox в точках x и x+Δx, который приближенно может быть принят за цилиндр с основанием S(x) и высотой dx. Поэтому дифференциал объема dV = S(x) dx.

3. Находим искомую величину V путем интегрирования dA в пределах от a до B:

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx.} \qquad (41.6)$$

Полученная формула называется формулой объема тела по площади параллельных сечений.

Пример 3. Найти объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

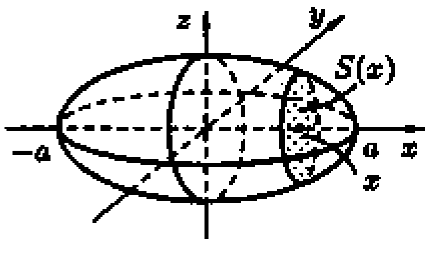


Рис. 189.

Решение: Рассекая эллипсоид плоскостью, параллельной плоскости Oyz и на расстоянии x от нее (-a≤x≤a), получим эллипс (см. рис. 189):

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1.$$

Площадь этого эллипса равна $S(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$

Поэтому, по формуле (41.6), имеем

$$V = \pi bc \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

4. Вычисление площади поверхности вращения

Пусть кривая AB является графиком функции y = f(x) ≥ 0, где x є [a;b], а функция y = f(x) и ее производная y'=f'(x) непрерывны на этом отрезке.

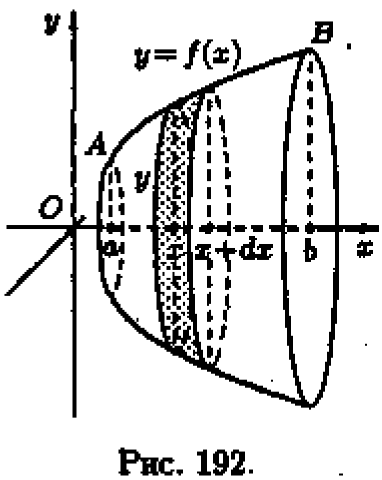


Рис. 192.

Найдем площадь S поверхности, образованной вращением кривой AB вокруг оси Ox.

1. Через произвольную точку x є [a; b] проведем плоскость ∏, перпендикулярную оси Ox. Плоскость ∏ пересекает поверхность вращения по окружности с радиусом y = f(x) (см. рис. 192). Величина S поверхности части фигуры вращения, лежащей левее плоскости, является функцией от x, т. е. s=s(x) (s(a)=0 и s(b)=S).

2. Дадим аргументу x приращение Δx = dx. Через точку x + dx є [a; b] также проведем плоскость, перпендикулярную оси

Ох. Функция s=s(x) получит приращение Аз, изображенного на рисунке в виде «пояска».

Найдем дифференциал площади ds, заменяя образованную между сечениями фигуру усеченным конусом, образующая которого равна *dl*, а радиусы оснований рав ны у и y+dy. Площадь его боковой поверхности равна ds=π(y+y+*dy*)•*dl*=2πy*dl* +π*dydl*. Отбрасывая произведение dydl как бесконечно малую высшего порядка, чем ds, получаем ds=2πy*dl*, или, так как

$$dl = \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx, \text{ то } ds = 2\pi y\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx.$$

3. Интегрируя полученное равенство в пределах от x = a до x = b, получаем

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\cdot\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx. \qquad (41.9)$$

Пример 4. Найти площадь поверхности шара радиуса R.

Решение: Можно считать, что поверхность шара образована вращением полуокружности $y=\sqrt{R^2-x^2},\ -R\leqslant x\leqslant R,$ вокруг оси Ох. По формуле (41.9) находим

$$S = 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2+x^2}\,dx = 2\pi R\cdot x\Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2.$$

Самостоятельная работа№17

Выполнение домашней контрольной работы по теме

«Интегральное исчисление»

Таблица основных интегралов

1 $\int dx = x + C;$

2 $\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1;$

3 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$

4 $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$ 4а $\int e^x dx = e^x + C;$

5 $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

6 $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

7 $\int \dfrac{1}{x^2 + a^2} dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C;$

8 $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C;$

9 $\int \dfrac{1}{x^2 - a^2} dx = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C;$

10 $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| \sqrt{x^2 \pm a^2} + x \right| + C;$

11 $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

12 $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

Образец решения варианта

Задание 1: Вычислить интеграл:

а) $\int \left(x^5 + \dfrac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7 \right) dx;$ б) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}};$ в) $\int \dfrac{x^4}{\sin^2 x^5} dx;$

г) $\int 3^{2-7x} dx;$ д) $\int \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx;$ е) $\int e^x \cdot \sin e^x dx;$

ж) $\int \dfrac{x}{\sqrt{4-x^4}} dx;$ з) $\int \dfrac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 7}} dx;$ и) $\int \dfrac{\sin 5x}{4 - \cos^2 5x} dx;$

к) $\int x \cdot \operatorname{tg} x^2 dx;$ л) $\int \dfrac{3^x}{9^x + 4} dx;$ м) $\int x^2 \cdot \cos x\; dx;$

н) $\int \arccos x\, dx;$ о) $\int \dfrac{x^2 + 3x + 6}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx;$ п) $\int \dfrac{x^6}{x^2 - x + 1} dx;$

р) $\int \dfrac{dx}{\sin x (2 + \cos x - 2\sin x)};$ с) $\int \dfrac{3x dx}{\sqrt{3x^2 - 2} + \sqrt[4]{3x^2 - 2}};$ т) $\int \cos 3x \cos 5x dx;$

у) $\int \sin^4 x\, dx;$ ф) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}};$

Решение:

а) Найдем интеграл, применив свойства неопределенного интеграла и формулы (**1**) и (**2**) табличного интегрирования:

$$\int\left(x^5+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx=\int\left(x^5+4\cdot x^{-3}-x^{\frac{2}{3}}-7\right)dx=\int x^5dx+4\int x^{-3}dx-\int x^{\frac{2}{3}}dx-7\int dx=$$

$$=\frac{x^{5+1}}{5+1}+4\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}-\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}-7x+C=\frac{x^6}{6}+4\cdot\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-7x+C=\frac{x^6}{6}-\frac{2}{x^2}-\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5}-7x+C;$$

Интегралы (б – л) решим методом замены переменной**.**

б) $$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}\left|\begin{array}{l}t=1+2x;\\ dt=2dx;\\ dx=\frac{1}{2}dt\end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt[4]{t^3}}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{4}}dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{4}}}{1/4}+C=2(1+2x)^{1/4}+=2\sqrt[4]{1+2x}+C;$$

в) $$\int\frac{x^4}{\sin^2x^5}dx=\left|\begin{array}{l}t=x^5\\ dt=5x^4dx\\ x^4dx=\frac{1}{5}dt\end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{5}dt}{\sin^2t}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sin^2t}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**12**)}

$$=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}t+C=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}x^5+C;$$

г) $$\int 3^{2-7x}dx=\left|\begin{array}{l}t=2-7x,\\ dt=-7dx,\\ dx=-\frac{1}{7}dt\end{array}\right|=\int 3^t\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)dt=-\frac{1}{7}\int 3^tdt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**4**)}

$$=-\frac{1}{7}\cdot\frac{3^t}{\ln 3}+C=-\frac{1}{7}\cdot\frac{3^{2-7x}}{\ln 3}+C;$$

д) $$\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx=\left|\begin{array}{l}t=\operatorname{arctg}x\\ dt=\frac{1}{1+x^2}dx\end{array}\right|=\int tdt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$$=\frac{t^2}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2x+C;$$

е) $\int e^x \cdot \sin e^x dx = \left| \begin{matrix} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{matrix} \right| = \int \sin t dt =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**5**)}

$= -\cos t + C = -\cos e^x + C;$

ж) $\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^4}} dx = \left| \begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2} dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{2^2 - t^2}} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**8**)}

$= \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{2} + C;$

з) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 7}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{\left(e^x\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2}} dx = \left| \begin{matrix} t = e^x, \\ dt = e^x dx, \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2}} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**10**)}

$= \ln\left| \sqrt{t^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} + t \right| + C = \ln\left| \sqrt{e^{2x} - 7} + e^x \right| + C;$

и) $\int \frac{\sin 5x \; dx}{9 - \cos^2 5x} = \left| \begin{matrix} t = \cos 5x \\ dt = -5 \sin 5x \, dx \\ \sin 5x \, dx = -\frac{1}{5} dt \end{matrix} \right| = \int \frac{-\frac{1}{5} dt}{9 - t^2} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2 - 9} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t^2 - 3^2} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**9**)}

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln\left| \frac{t - 3}{t + 3} \right| + C = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln\left| \frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3} \right| + C = \frac{1}{30} \ln\left| \frac{\cos 5x - 3}{\cos 5x + 3} \right| + C;$

к) $\int x \cdot \mathrm{tg} x^2 dx = \int \frac{x \sin x^2}{\cos x^2} dx = \left| \begin{matrix} t = \cos x^2 \\ dt = -2x \sin x^2 dx \\ x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} dt \end{matrix} \right| = -\int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**3**)}

$= -\frac{1}{2} \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \ln\left| \cos x^2 \right| + C;$

л) $\int \frac{3^x}{9^x+4}dx = \int \frac{3^x}{\left(3^x\right)^2+2^2}dx = \left| \begin{array}{l} t = 3^x \\ dt = 3^x \ln 3 dx \\ 3^x dx = \frac{1}{\ln 3}dt \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{t^2+2^2} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**7**)}

$= \frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2\ln 3}\operatorname{arctg}\frac{3^x}{2} + C;$

Найдем интегралы (м – н) методом интегрирования по частям, используя формулу $\int U \cdot V' dx = U \cdot V - \int U' \cdot V dx$ (13):

м) $\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} U = x^2; & U' = 2x \\ V' = \cos x; & V = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x - \int 2x \cdot \sin x dx =$

$= \left| \begin{array}{ll} U = 2x; & U' = 2 \\ V' = \sin x; & V = -\cos x \end{array} \right| == x^2 \cdot \sin x - \left(2x \cdot (-\cos x) - \int 2 \cdot (-\cos x) dx\right) =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**6**)}

$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C;$

н) $\int \arccos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} U = \arccos x; & U' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ V' = 1; & V = x \end{array} \right| = x \cdot \arccos x - \int x \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

{второе слагаемое вычислим с помощью замены, применив формулу (**2**)}

$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2xdx \\ -xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2} + C = \sqrt{1-x^2} + C$

в итоге получаем $\int \arccos x \, dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C;$

о) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}dx.$

Под знаком интеграла правильная рациональная дробь. Разложим её на простейшие дроби:

$\frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x} = \frac{x^2+3x+6}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} =$

$= \frac{A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)} =$

$= \frac{Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - 2Cx}{x(x-2)(x-3)};$

Перейдем к равенству числителей:

$x^2 + 3x + 6 = Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - 2Cx.$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{array}{l} x^2:\ 1=A+B+C \\ x^1:\ \ 3=-5A-3B-2C \\ x^0:\ 6=6A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=1+B+C \\ 8=-3B-2C \\ A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=-8, \\ C=8. \end{cases}$$

Тогда $\dfrac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{8}{x-2}+\dfrac{8}{x-3}.$

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя свойства неопределённого интеграла, получим:

$$\int\left(\frac{1}{x}-\frac{8}{x-2}+\frac{8}{x-3}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-8\int\frac{dx}{x-2}+8\int\frac{dx}{x-3}=:$$

{для нахождения интегралов применим формулу (**3**)}

$$=\ln|x|-8\ln|x-2|+8\ln|x-3|+C;$$

п) $\displaystyle\int\frac{x^6}{x^2-x+1}dx.$

Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть этой дроби путем деления числителя на знаменатель:

$$\frac{x^6}{x^2-x+1}=x^4+x^3-x-1+\frac{1}{x^2-x+1}$$

Выделим полный квадрат в знаменателе правильной рациональной дроби:

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Возвращаясь к исходному интегралы, получим:

$$\int\left(x^4+x^3-x-1+\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)dx=\int x^4dx+\int x^3dx-\int xdx-\int 1dx+\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

{для нахождения первых трёх интегралов применим формулу (**2**), для четвёртого – формулу (**1**), последний интеграл найдем с помощью формулы (**7**)}

$$=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-x+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C;$$

р) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}.$

Найдем интеграл используя универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2},\ \ \sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \dfrac{x}{2}=\operatorname{arctg}t,\ x=2\operatorname{arctg}t\Rightarrow dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right|$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-2\cdot\frac{2t}{1+t^2}\right)} = \int \frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}dt.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)} = \frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)} = \frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t-3} =$$

$$= \frac{A(t-1)(t-3)+Bt(t-3)+Ct(t-1)}{t(t-1)(t-3)}$$

Перейдем к равенству числителей:

$$1+t^2 = At^2-4At+3A+Bt^2-3Bt+Ct^2-Ct.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{array}{l} t^2: \ 1 = A+B+C \\ t^1: \ 0 = -4A-3B-C \\ t^0: \ 1 = 3A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3}, \\ B = -1, \\ C = \frac{5}{3}, \end{cases}$$

Тогда $\dfrac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)} = \dfrac{1}{3t}-\dfrac{1}{t-1}+\dfrac{5}{3(t-3)}$.

Интегрируя почленно полученное равенство, получим::

$$\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t-1}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3} =$$

{для нахождения интегралов применим формулу (**3**)}

$$= \frac{1}{3}\ln|t|-\ln|t-1|+\frac{5}{3}\ln|t-3|+C = \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right|+C;$$

c) $\displaystyle\int\frac{3xdx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}}$.

Произведем замену: $3x^2-2 = t,\ dt = 6xdx,\ 3xdx = \dfrac{1}{2}dt.$

Получим: $\displaystyle\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}+\sqrt[4]{t}} =$

Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1}{4}$ есть 4, поэтому введем следующую замену:

$$\left|\begin{array}{l} t = z^4 \\ dt = 4z^3dz \\ z = \sqrt[4]{t} \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{4z^3dz}{\sqrt{z^4}+\sqrt[4]{z^4}} = 2\int\frac{z^2}{z^2+z}dz = 2\int\frac{z^2}{z(z+1)}dz = 2\int\frac{z}{z+1}dz =$$

$$= 2\int\left(1-\frac{1}{z+1}\right)dz = 2\int dz-2\int\frac{dz}{z+1} =$$

{для нахождения интегралов применим формулы (**1**) и (**3**)}

$$= 2z-2\ln|z+1|+C = 2\sqrt[4]{3x^2-2}-2\ln\sqrt[4]{3x^2-2}+C;$$

т) $\int \cos 3x \cos 5x dx$.

Найдем интеграл, используя формулу тригонометрических преобразований $\cos 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2}(\cos(3x-5x)+\cos(3x+5x)) = \frac{1}{2}(\cos(-2x)+\cos 8x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 8x)$

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя формулу (**6**), получим:

$$\int \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}(-\sin 8x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\sin 2x) + C = -\frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{4}\sin 2x + C;$$

у) $$\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \left\{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right\} = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \int \frac{1-2\cos 2x + \cos^2 2x}{4}dx = \left\{\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}\right\} = \frac{1}{4}\int\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - 2\cdot\frac{1}{4}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx == \frac{3}{8}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx =$$

{для нахождения интегралов применим формулы (**1**) и (**6**)}

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + C = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C;\ ;$$

ф) $$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} =:$$

$$\left| \begin{aligned} & t = \sqrt{e^{2x}-1}, \\ & e^{2x} = t^2 + 1, \\ & x = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) \\ & dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt \end{aligned} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt}{t} = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**7**)}

$$= \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x}-1} + C.$$

Задание. **Вычислить интегралы:**

Вариант 1.

а) $\int \left(x^2 - 2x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$;

в) $\int \frac{x^2}{(1+3x^3)^2}dx$;

г) $\int \frac{x}{1+3x^2}dx$;

д) $\int \frac{\cos x}{1-2\sin x}dx$;

е) $\int e^{-x^2} x dx$;

ж) $\int \sin 2x\,dx$;

з) $\int \left(\cos\frac{x}{3}+1\right)dx$;

и) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

к) $\int \frac{3^x}{3^{2x}+1}dx$;

л) $\int \frac{dx}{x^2-2x+4}$;

м) $\int x e^{-2x}\,dx$;

н) $\int x^2 \ln x \, dx$;

о) $\int \frac{2x-1}{x^2-3x+2} dx$;

п) $\int \frac{x^4+2}{x^3+3x} dx$;

р) $\int \frac{dx}{1+3\cos x}$;

с) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx$;

т) $\int \sin x \cos 2x dx$;

у) $\int \cos^2 x \, dx$;

ф) $\int \left(e^x+2\right)^3 dx$.

<u>Вариант 2.</u>

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(x^4 - \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3} - 11\right) dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$;

в) $\int \frac{xdx}{\left(5x^2+1\right)^2}$;

г) $\int 7^x \sqrt{3 \cdot 7^x + 4} dx$;

д) $\int \frac{x^2}{1+3x^3} dx$;

е) $\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+4} dx$;

ж) $\int \sin 5x \, dx$;

з) $\int \frac{dx}{1+3x^2}$;

и) $\int tg 3x \, dx$;

к) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$;

л) $\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x - 3}$;

м) $\int (x+3) e^{2x} dx$;

н) $\int x \arccos x \, dx$;

о) $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x} dx$;

п) $\int \frac{x^3+1}{x^2-4} dx$;

р) $\int \frac{dx}{2-2\sin x}$;

с) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}}$;

т) $\int \cos 3x \sin 2x dx$;

у) $\int \sin^4 x \cdot \cos x^5 \, dx$;

ф) $\int \sqrt{e^x+1} dx$.

<u>Вариант 3.</u>

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(x^2 - \sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{x} - 3\right) dx$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$;

в) $\int \frac{x^2}{\left(1-4x^3\right)^2} dx$;

г) $\int \frac{x \, dx}{x^2+5}$;

д) $\int \frac{\cos 3x}{1+\sin 3x} dx$;

е) $\int e^{-2x^2} \cdot x dx$;

ж) $\int a^{3x} \, dx$;

з) $\int (2+\sin 2x) dx$;

и) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$;

к) $\int 2^x tg 2^x \, dx$;

л) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx$;

м) $\int x e^x dx$;

н) $\int x \arcsin 5x \, dx$;

о) $\int \frac{x^2+2x-2}{x^3-9x} dx$;

п) $\int \frac{x^3+1}{x^3-2x} dx$;

р) $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x}$; с) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}dx$; т) $\int \cos 4x\cdot\cos 5x\,dx$;

у) $\int \sin^3 x\,dx$; ф) $\int (e^x-4)^2 dx$.

Вариант 4.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(1-2\sqrt[3]{x}+\frac{7}{x^4}\right)dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$; в) $\int \frac{xdx}{(3+x^2)^3}$;

г) $\int \frac{arctg 2x}{1+4x^2}dx$; д) $\int \frac{x^2}{1+4x^3}dx$; е) $\int \frac{e^x}{1-2e^x}dx$;

ж) $\int e^{-x^3}x^2dx$; з) $\int \sin 2x\,dx$; и) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$;

к) $\int \frac{x\,dx}{\sin x^2}$; л) $\int \frac{dx}{5+4x^2}$; м) $\int (x+2)\cos 5x\,dx$;

н) $\int \arcsin 4x\,dx$; о) $\int \frac{x-3}{x^3+8}dx$; п) $\int \frac{x^3-2}{x^3+2x^2+x}dx$;

р) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$; с) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx$; т) $\int \sin x\cdot\cos 3x\,dx$;

у) $\int \cos^4 x\,dx$; ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+e^x}}$.

Вариант 5.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(x^4-\frac{1}{2}x+\sqrt[3]{3x}\right)dx$; б) $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^5}$; в) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$;

г) $\int \frac{dx}{x+3}$; д) $\int \frac{\cos x}{1+3\sin x}dx$; е) $\int e^{2x}dx$;

ж) $\int 2^{-x^2}xdx$; з) $\int (1-\sin 3x)dx$; и) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$;

к) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$; л) $\int tg 3x\,dx$; м) $\int (x+5)e^{2x}dx$;

н) $\int x^7\ln x\,dx$; о) $\int \frac{x+2}{x^3-x^2-2x}dx$; п) $\int \frac{x^4-3}{x^2-25}dx$;

р) $\int \frac{dx}{\cos x+3\sin x}$; с) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}}$; т) $\int \cos 3x\sin 2x dx$;

у) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$;

ф) $\int \sqrt{4+e^x}\, dx$.

Вариант 6.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(2x^7 - \frac{3}{\sqrt{x}} + e^x\right) dx$;

б) $\int \frac{x^2 dx}{\left(1+3x^3\right)^3}$;

в) $\int \sqrt{1-5x}\, dx$;

г) $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2} dx$;

д) $\int \frac{e^x}{e^x+4} dx$;

е) $\int e^{\sin 2x} \cos 2x dx$;

ж) $\int 2^{-x^2} x dx$;

з) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$;

и) $\int tg 2x dx$;

к) $\int \frac{e^x}{\sin e^x} dx$;

л) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$;

м) $\int x \cos 2x\, dx$;

н) $\int 3x^2 \ln(x+2) dx$;

о) $\int \frac{2-3x}{x^3-4x} dx$;

п) $\int \frac{x^3+2}{x^2-2x+3} dx$.

р) $\int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x}$;

с) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-4} + \sqrt[4]{5x^2-4}}$;

т) $\int \sin 2x \cdot \cos 7x dx$;

у) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$;

ф) $\int \left(5+e^x\right)^2 dx$.

Вариант 7.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x^3} + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx$;

б) $\int \frac{x^2 dx}{\left(1-2x^3\right)^2}$;

в) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$;

г) $\int \frac{\cos 2x}{1-\sin 2x} dx$;

д) $\int \frac{x}{4x^2-3} dx$;

е) $\int e^{\cos 3x} \sin 3x dx$;

ж) $\int 2^{-3x^2} x dx$;

з) $\int \sin \frac{x}{5} dx$;

и) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$;

к) $\int tg(1-x) dx$;

л) $\int \frac{2^x dx}{4^x+1}$;

м) $\int x \sin 3x\, dx$;

н) $\int x \cdot arctgx\, dx$;

о) $\int \frac{x+3}{x^3+10x^2+25x} dx$;

п) $\int \frac{x^5+3x^2}{x^2+x} dx$;

р) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x} dx$.

с) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} dx$;

т) $\int \sin x \cdot \sin 3x dx$;

у) $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx$;

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 9}}$.

Вариант 8.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2} + 1\right)dx$;

б) $\int \sqrt{2x+3}\,dx$;

в) $\int \frac{x}{\left(1+4x^2\right)^2}dx$;

г) $\int \frac{dx}{5-x}$;

д) $\int \frac{dx}{4x - x\ln x}$;

е) $\int xe^{x^2-3}x\,dx$;

ж) $\int x\cos 2x^2\,dx$;

з) $\int \left(1 - \sin\frac{x}{5}\right)dx$;

и) $\int ctg\,2x\,dx$;

к) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$;

л) $\int \frac{x\,dx}{4+x^4}$;

м) $\int e^{2x}\cos x\,dx$;

н) $\int arctg\,3x\,dx$;

о) $\int \frac{x^2 - x + 2}{x^3 + 4x^2 + 3x}dx$;

п) $\int \frac{x^2 - x + 2}{x^3 + 4x^2 + 3x}dx$;

р) $\int \frac{dx}{3 - 2\cos x}$;

с) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+2\sqrt{x}}dx$;

т) $\int \sin x \cdot \sin 3x\,dx$;

у) $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx$;

ф) $\int \sqrt{e^x - 3}\,dx$.

Вариант 9.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \left(2 - 3\sqrt[5]{x^4} + \frac{1}{x^3}\right)dx$;

б) $\int \frac{x\,dx}{\left(1+3x^2\right)^5}$;

в) $\int \sqrt{1-2x}\,dx$;

г) $\int \frac{x^2}{1+2x^3}dx$;

д) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx$;

е) $\int e^{-x^3}x^2\,dx$;

ж) $\int \sqrt{3^x}\sqrt{5^x}\,dx$;

з) $\int \frac{x^3}{\sin^2 x^4}dx$;

и) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos x}dx$;

к) $\int \frac{dx}{\sin^2 4x}$;

л) $\int \left(2 - 3\cos 2x\right)dx$;

м) $\int \left(1 - x^2\right)\sin 3x\,dx$;

н) $\int \ln\left(x^2 + 5\right)dx$;

о) $\int \frac{x^2 + 4x}{x - x^2 - 2x^3}dx$;

п) $\int \frac{x^4}{1-x^2}dx$;

р) $\int \frac{dx}{a\sin x + 3\cos x}$;

с) $\int \frac{\sqrt{x}}{4 - \sqrt[4]{x}}dx$;

т) $\int \sin 2x \cdot \sin 8x\,dx$;

у) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x\,dx$;

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - e^x}}$.

Вариант 10.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(\sqrt{x}-2x^3-\frac{1}{x^2}\right)dx$;

б) $\int(1-\sin 2x)^5\cos 2x dx$;

в) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

г) $\int\frac{x^3dx}{1+4x^4}$;

д) $\int\frac{\sin x}{1+2\cos x}dx$;

е) $\int 2^{-x^3}x^2dx$;

ж) $\int(e^x+1)^2dx$;

з) $\int e^x\sin e^x dx$;

и) $\int\cos 3x dx$;

к) $\int\frac{dx}{\sin^2(1-x)}$;

л) $\int\cos 2x\sin 3x dx$;

м) $\int e^{-2x}(2x+5)dx$;

н) $\int(\sin^2 x+1)x dx$;

о) $\int\frac{x+4}{x^3-2x^2+3x}dx$;

п) $\int\frac{x^4+x}{27+x^3}dx$;

р) $\int\frac{\cos x}{1+\cos x-\sin x}dx$;

с) $\int\frac{\sqrt{x}}{1+3\sqrt[4]{x}}dx$;

т) $\int\sin 5x\cdot\cos 8x\, dx$;

у) $\int\cos^5 x dx$;

ф) $\int(e^x-3)^2dx$.

Самостоятельная работа №18

Работа с дополнительной литературой по теме

«Уравнения вида $\frac{dy}{dx}$=f(x)»

Многие физические законы, которым подчиняются те или иные явления, записываются в виде математического уравнения, выражающего определенную зависимость между какими-то величинами. Часто речь идет о соотношении между величинами, изменяющимися с течением времени, например экономичность двигателя, измеряемая расстоянием, которое автомашина может проехать на одном литре горючего, зависит от скорости движения автомашины. Соответствующее уравнение содержит одну или несколько функций и их производных и называется дифференциальным уравнением. (Темп изменения расстояния со временем определяется скоростью; следовательно, скорость – производная от расстояния; аналогично, ускорение – производная от скорости, так как ускорение задает темп изменения скорости со временем.) Большое значение, которое имеют дифференциальные уравнения для математики и особенно для ее приложений, объясняются тем, что к решению таких уравнений сводится исследование многих физических и технических задач. Дифференциальные уравнения играют существенную роль и в других науках, таких, как биология, экономика и электротехника; в действительности, они возникают везде, где есть необходимость количественного (числового) описания явлений (коль скоро окружающий мир изменяется во времени, а условия изменяются от одного места к другому).

Примеры. Следующие примеры позволяют лучше понять, как различные задачи формулируются на языке дифференциальных уравнений.

1) Закон распада некоторых радиоактивных веществ состоит в том, что скорость распада пропорциональна наличному количеству этого вещества. Если x – количество вещества в некоторый момент времени t, то этот закон можно записать так:

$$\frac{dx}{dt} = -kx,$$

где dx/dt – скорость распада, а k – некоторая положительная постоянная, характеризующая данное вещество. (Знак «минус» в правой части указывает на то, что xубывает со временем; знак «плюс», подразумеваемый всегда, когда знак явно не указан, означал бы, что x возрастает со временем.)

2) Емкость первоначально содержит 10 кг соли, растворенной в 100 м^3 воды. Если чистая вода вливается в емкость со скоростью 1 м^3 в минуту и равномерно перемешивается с раствором, а образовавшийся раствор вытекает из емкости с такой же скоростью, то сколько соли окажется в емкости в любой последующий момент времени? Если x – количество соли (в кг) в емкости в момент времени t, то в любой момент времени t в 1 м^3 раствора в емкости содержится $x/100$ кг соли; поэтому количество соли убывает со скоростью $x/100$ кг/мин, или

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{100}.$$

3) Пусть на тело массы m, подвешенное к концу пружины, действует возвращающая сила, пропорциональная величине растяжения пружины. Пусть x – величина отклонения тела от положения равновесия. Тогда по второму закону Ньютона, который утверждает, что ускорение (вторая производная от x по времени, обозначаемая d^2x/dt^2) пропорционально силе:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Правая часть стоит со знаком минус потому, что возвращающая сила уменьшает растяжение пружины.

4) Закон охлаждения тел утверждает, что количество тепла в теле убывает пропорционально разности температур тела и окружающей среды. Если чашка кофе, разогретого до температуры 90 С находится в помещении, температура в котором равна 20 С, то

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-20),$$

где T – температура кофе в момент времени t.

5) Министр иностранных дел государства Блефуску утверждает, что принятая Лиллипутией программа вооружений вынуждает его страну увеличить военные расходы на сколько это только возможно. С аналогичными заявлениями выступает и министр иностранных дел Лиллипутии. Возникающую в результате ситуацию (в простейшей интерпретации) можно точно описать двумя дифференциальными уравнениями.
Пусть x и y – расходы на вооружение Лиллипутии и Блефуску. Предполагая, что Лиллипутия увеличивает свои расходы на вооружение со скоростью, пропорциональной скорости увеличения расходов на вооружение Блефуску, и наоборот, получаем:

$$\frac{dx}{dt} = k\frac{dy}{dt} - ax,$$
$$\frac{dy}{dt} = l\,\frac{dx}{dt} - by,$$

где члены $-ax$ и $-by$ описывают военные расходы каждой из стран, k и l – положительные постоянные. (Эту задачу впервые таким образом сформулировал в 1939 Л.Ричардсон.)

После того, как задача записана на языке дифференциальных уравнений, следует попытаться их решить, т.е. найти величины, скорости изменения которых входят в уравнения. Иногда решения находятся в виде явных формул, но чаще их удается представить лишь в приближенном виде или же получить о них качественную информацию. Часто бывает трудно установить, существует ли решение вообще, не говоря уже о том, чтобы найти его. Важный раздел теории дифференциальных уравнений составляют так называемые «теоремы существования», в которых доказывается наличие решения у того или иного типа дифференциальных уравнений.

Первоначальная математическая формулировка физической задачи обычно содержит упрощающие предположения; критерием их разумности может служить степень согласованности математического решения с имеющимися наблюдениями.

Решения дифференциальных уравнений. Дифференциальному уравнению, например $dy/dx = x/y$, удовлетворяет не число, а функция, в данном конкретном случае такая, что ее график в любой точке, например в точке с координатами (2,3), имеет касательную с угловым коэффициентом, равным отношению координат (в нашем примере 2/3). В этом нетрудно убедиться, если построить большое число точек и от каждой отложить короткий отрезок с соответствующим наклоном. Решением будет функция, график которой касается каждой своей точкой соответствующего отрезка. Если точек и отрезков достаточно много, то мы можем приближенно наметить ход кривых-решений (три такие кривые показаны на рис. 1). Существует ровно одна кривая-решение, проходящая через каждую точку с $y \neq 0$. Каждое отдельное решение называется частным решением дифференциального уравнения; если удается найти формулу, содержащую все частные решения (за исключением, быть может, нескольких особых), то говорят, что получено общее решение. Частное решение представляет собой одну функцию, в то время как общее – целое их семейство. Решить дифференциальное уравнение – это значит найти либо его частное, либо общее решение. В рассматриваемом нами примере общее решение имеет вид $y^2 - x^2 = c$, где c – любое число; частное решение, проходящее через точку (1,1), имеет вид $y = x$ и получается при $c = 0$; частное решение, проходящее через точку (2,1), имеет вид $y^2 - x^2 = 3$. Условие, требующее, чтобы кривая-решение проходила, например, через точку (2,1), называется начальным условием (так как задает начальную точку на кривой-решении).

Можно показать, что в примере (1) общее решение имеет вид $x = ce^{-kt}$, где c – постоянная, которую можно определить, например, указав количество вещества при $t = 0$. Уравнение из примера (2) – частный случай уравнения из примера (1), соответствующий $k = 1/100$. Начальное условие $x = 10$ при $t = 0$ дает частное решение $x = 10e^{-t/100}$. Уравнение из примера (4) имеет общее решение $T = 70 + ce^{-kt}$ и частное решение $70 + 130^{-kt}$; чтобы определить значение k, необходимы дополнительные данные.

Дифференциальное уравнение $dy/dx = x/y$ называется уравнением первого порядка, так как содержит первую производную (порядком дифференциального уравнения принято считать порядок входящей в него самой старшей производной). У большинства (хотя и не у всех) возникающих на практике дифференциальных уравнений первого рода через каждую точку проходит только одна кривая-решение.

Существует несколько важных типов дифференциальных уравнений первого порядка, допускающих решения в виде формул, содержащих только элементарные функции – степени, экспоненты, логарифмы, синусы и косинусы и т.д. К числу таких уравнений относятся следующие.

Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения вида $dy/dx = f(x)/g(y)$ можно решить, записав его в дифференциалах $g(y)dy = f(x)dx$ и проинтегрировав обе части. В худшем случае решение представимо в виде интегралов от известных функций. Например, в случае уравнения $dy/dx = x/y$ имеем $f(x) = x$, $g(y) = y$. Записав его в виде $ydy = xdx$ и проинтегрировав, получим $y^2 = x^2 + c$. К уравнениям с разделяющимися переменными относятся уравнения из примеров (1), (2), (4) (их можно решить описанным выше способом).

Уравнения в полных дифференциалах. Если дифференциальное уравнение имеет вид $dy/dx = M(x,y)/N(x,y)$, где M и N – две заданные функции, то его можно представить как $M(x,y)dx - N(x,y)dy = 0$. Если левая часть является дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$, то дифференциальное уравнение можно записать в виде $dF(x,y) = 0$, что эквивалентно уравнению $F(x,y) = \mathrm{const}$. Таким образом, кривые-решения уравнения – это «линии постоянных уровней» функции, или геометрические места точек, удовлетворяющих уравнениям $F(x,y) = c$. Уравнение $ydy = xdx$ (рис. 1) – с разделяющимися переменными, и оно же – в полных дифференциалах: чтобы убедиться в последнем, запишем его в виде $ydy - xdx = 0$, т.е. $d(y^2 - x^2) = 0$. Функция $F(x,y)$ в этом случае равна $(1/2)(y^2 - x^2)$; некоторые из ее линий постоянного уровня представлены на рис. 1.

Линейные уравнения. Линейные уравнения – это уравнения «первой степени» – неизвестная функция и ее производные входят в такие уравнения только в первой степени. Таким образом, линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $dy/dx + p(x) = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ – функции, зависящие только от x. Его решение всегда можно записать с помощью интегралов от известных функций. Многие другие типы дифференциальных уравнений первого порядка решаются с помощью специальных приемов.

Уравнения старших порядков. Многие дифференциальные уравнения, с которыми сталкиваются физики, это уравнения второго порядка (т.е. уравнения, содержащие вторые производные) Таково, например, уравнение простого гармонического движения из примера (3), $md^2x/dt^2 = -kx$. Вообще говоря, можно ожидать, что уравнение второго порядка имеет частные решения, удовлетворяющие двум условиям; например, можно потребовать, чтобы кривая-решение проходила через данную точку в данном направлении. В случаях, когда дифференциальное уравнение содержит некоторый параметр (число, величина которого зависит от обстоятельств), решения требуемого типа существуют только при определенных значениях этого параметра. Например, рассмотрим уравнение $md^2x/dt^2 = -kx$ и потребуем, чтобы $y(0) = y(1) = 0$. Функция y □ 0 заведомо является решением, но если $\sqrt{k/m}$ – целое кратное числа □, т.е. $k = m^2n^2$□^{2}, где n – целое число, а в действительности только в этом случае, существуют другие решения, а именно: $y = \sin n$□x. Значения параметра, при которых уравнение имеет особые решения, называются характеристическими или собственными значениями; они играют важную роль во многих задачах.

Уравнение простого гармонического движения служит примером важного класса уравнений, а именно: линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Более общий пример (также второго порядка) – уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=f(x),$$

где a и b – заданные постоянные, $f(x)$ – заданная функция. Такие уравнения можно решать различными способами, например, с помощью интегрального преобразования Лапласа. То же можно сказать и о линейных уравнениях более высоких порядков с постоянными коэффициентами. Не малую роль играют также и линейные уравнения с переменными коэффициентами.

Нелинейные дифференциальные уравнения. Уравнения, содержащие неизвестные функции и их производные в степени выше первой или каким-либо более сложным образом, называются нелинейными. В последние годы они привлекают все большее внимание. Дело в том, что физические уравнения обычно линейны лишь в первом приближении; дальнейшее и более точное исследование, как правило, требует использования нелинейных уравнений. Кроме того, многие задачи нелинейны по своей сути. Так как решения нелинейных уравнений зачастую очень сложны и их трудно представить простыми формулами, значительная часть современной теории посвящена качественному анализу их поведения, т.е. разработке методов, позволяющих, не решая уравнения, сказать нечто существенное о характере решений в целом: например, что все они ограниченны, или имеют периодический характер, или определенным образом зависят от коэффициентов.

Приближенные решения дифференциальных уравнений могут быть найдены в численном виде, но для этого требуется много времени. С появлением быстродействующих компьютеров это время сильно сократилось, что открыло новые возможности численного решения многих, ранее не поддававшихся такому решению, задач.

Теоремы существования. Теоремой существования называется теорема, утверждающая, что при определенных условиях данное дифференциальное уравнение имеет решение. Встречаются дифференциальные уравнения, не имеющие решений или имеющие их больше, чем ожидается. Назначение теоремы существования – убедить нас в том, что у данного уравнения действительно есть решение, а чаще всего заверить, что оно имеет ровно одно решение требуемого типа. Например, уже встречавшееся нам уравнение $dy/dx = -2y$ имеет ровно одно решение, проходящее через каждую точку плоскости (x,y), а так как одно такое решение мы уже нашли, то тем самым полностью решили это уравнение. С другой стороны, уравнение $(dy/dx)^2 = 1 - y^2$ имеет много решений. Среди них прямые $y = 1$, $y = -1$ и кривые $y = \sin(x + c)$. Решение может состоять из нескольких отрезков этих прямых и кривых, переходящих друг в друга в точках касания (рис. 2).

Самостоятельная работа №19

Работа с дополнительной литературой по теме

«Уравнения вида $\frac{dy}{dx}$=f(y)»

Многие физические законы, которым подчиняются те или иные явления, записываются в виде математического уравнения, выражающего определенную зависимость между какими-то величинами. Часто речь идет о соотношении между величинами, изменяющимися с течением времени, например экономичность двигателя, измеряемая расстоянием, которое автомашина может проехать на одном литре горючего, зависит от скорости движения автомашины. Соответствующее уравнение содержит одну или несколько функций и их производных и называется дифференциальным уравнением. (Темп изменения расстояния со временем определяется скоростью; следовательно, скорость – производная от расстояния; аналогично, ускорение – производная от скорости, так как ускорение задает темп изменения скорости со временем.) Большое значение, которое имеют дифференциальные уравнения для математики и особенно для ее приложений, объясняются тем, что к решению таких уравнений сводится исследование многих физических и технических задач. Дифференциальные уравнения играют существенную роль и в других науках, таких, как биология, экономика и электротехника; в действительности, они возникают везде, где есть необходимость количественного (числового) описания явлений (коль скоро окружающий мир изменяется во времени, а условия изменяются от одного места к другому).

Решения дифференциальных уравнений. Дифференциальному уравнению, например $dy/dx = x/y$, удовлетворяет не число, а функция, в данном конкретном случае такая, что ее график в любой точке, например в точке с координатами (2,3), имеет касательную с угловым коэффициентом, равным отношению координат (в нашем примере 2/3). В этом нетрудно убедиться, если построить большое число точек и от каждой отложить короткий отрезок с соответствующим наклоном. Решением будет функция, график которой касается каждой своей точкой соответствующего отрезка. Если точек и отрезков достаточно много, то мы можем приближенно наметить ход кривых-решений (три такие кривые показаны на рис. 1). Существует ровно одна кривая-решение, проходящая через каждую точку с $y \neq 0$. Каждое отдельное решение называется частным решением дифференциального уравнения; если удается найти формулу, содержащую все частные решения (за исключением, быть может, нескольких особых), то говорят, что получено общее решение. Частное решение представляет собой одну функцию, в то время как общее – целое их семейство. Решить дифференциальное уравнение – это значит найти либо его частное, либо общее решение. В рассматриваемом нами примере общее решение имеет вид $y^2 - x^2 = c$, где c – любое число; частное решение, проходящее через точку (1,1), имеет вид $y = x$ и получается при $c = 0$; частное решение, проходящее через точку (2,1), имеет вид $y^2 - x^2 = 3$. Условие, требующее, чтобы кривая-решение проходила, например, через точку (2,1), называется начальным условием (так как задает начальную точку на кривой-решении).

Можно показать, что в примере (1) общее решение имеет вид $x = ce^{-kt}$, где c – постоянная, которую можно определить, например, указав количество вещества при $t = 0$. Уравнение из примера (2) – частный случай уравнения из примера (1), соответствующий $k = 1/100$. Начальное условие $x = 10$ при $t = 0$ дает частное решение $x = 10e^{-t/100}$. Уравнение из примера (4) имеет общее решение $T = 70 + ce^{-kt}$ и частное решение $70 + 130^{-kt}$; чтобы определить значение k, необходимы дополнительные данные.

Дифференциальное уравнение $dy/dx = x/y$ называется уравнением первого порядка, так как содержит первую производную (порядком дифференциального уравнения принято считать порядок входящей в него самой старшей производной). У большинства (хотя и не у всех) возникающих на практике дифференциальных уравнений первого рода через каждую точку проходит только одна кривая-решение.

Существует несколько важных типов дифференциальных уравнений первого порядка, допускающих решения в виде формул, содержащих только элементарные функции – степени, экспоненты, логарифмы, синусы и косинусы и т.д. К числу таких уравнений относятся следующие.

Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения вида $dy/dx = f(x)/g(y)$ можно решить, записав его в дифференциалах $g(y)dy = f(x)dx$ и проинтегрировав обе части. В худшем случае решение представимо в виде интегралов от известных функций. Например, в случае уравнения $dy/dx = x/y$ имеем $f(x) = x$, $g(y) = y$. Записав его в виде $ydy = xdx$ и проинтегрировав, получим $y^2 = x^2 + c$. К уравнениям с разделяющимися переменными относятся уравнения из примеров (1), (2), (4) (их можно решить описанным выше способом).

Уравнения в полных дифференциалах. Если дифференциальное уравнение имеет вид $dy/dx = M(x,y)/N(x,y)$, где M и N – две заданные функции, то его можно представить как $M(x,y)dx – N(x,y)dy = 0$. Если левая часть является дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$, то дифференциальное уравнение можно записать в виде $dF(x,y) = 0$, что эквивалентно уравнению $F(x,y) = \text{const}$. Таким образом, кривые-решения уравнения – это «линии постоянных уровней» функции, или геометрические места точек, удовлетворяющих уравнениям $F(x,y) = c$. Уравнение $ydy = xdx$ (рис. 1) – с разделяющимися переменными, и оно же – в полных дифференциалах: чтобы убедиться в последнем, запишем его в виде $ydy – xdx = 0$, т.е. $d(y^2 – x^2) = 0$. Функция $F(x,y)$ в этом случае равна $(1/2)(y^2 – x^2)$; некоторые из ее линий постоянного уровня представлены на рис. 1.

Линейные уравнения. Линейные уравнения – это уравнения «первой степени» – неизвестная функция и ее производные входят в такие уравнения только в первой степени. Таким образом, линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $dy/dx + p(x) = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ – функции, зависящие только от x. Его решение всегда можно записать с помощью интегралов от известных функций. Многие другие типы дифференциальных уравнений первого порядка решаются с помощью специальных приемов.

Уравнения старших порядков. Многие дифференциальные уравнения, с которыми сталкиваются физики, это уравнения второго порядка (т.е. уравнения, содержащие вторые производные) Таково, например, уравнение простого гармонического движения из примера (3), $md^2x/dt^2 = –kx$. Вообще говоря, можно ожидать, что уравнение второго порядка имеет частные решения, удовлетворяющие двум условиям; например, можно потребовать, чтобы кривая-решение проходила через данную точку в данном направлении. В случаях, когда дифференциальное уравнение содержит некоторый параметр (число, величина которого зависит от обстоятельств), решения требуемого типа существуют только при определенных значениях этого параметра. Например, рассмотрим уравнение $md^2x/dt^2 = –kx$ и потребуем, чтобы $y(0) = y(1) = 0$. Функция y □ 0 заведомо является решением, но если $\sqrt{k/m}$ – целое кратное числа □, т.е. $k = m^2n^2$□^{2}, где n – целое число, а в действительности только в этом случае, существуют другие решения, а именно: $y = \sin n$□x. Значения параметра, при которых уравнение имеет особые решения, называются характеристическими или собственными значениями; они играют важную роль во многих задачах.

Уравнение простого гармонического движения служит примером важного класса уравнений, а именно: линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Более общий пример (также второго порядка) – уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=f(x),$$

где a и b – заданные постоянные, $f(x)$ – заданная функция. Такие уравнения можно решать различными способами, например, с помощью интегрального преобразования Лапласа. То же можно сказать и о линейных уравнениях более высоких порядков с постоянными коэффициентами. Не малую роль играют также и линейные уравнения с переменными коэффициентами.

Самостоятельная работа №20

Работа с дополнительной литературой по теме

«Уравнения в полных дифференциалах»

Определение уравнения в полных дифференциалах.

Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует такая функция двух переменных $u(x,y)$ с непрерывными частными производными, что справедливо выражение

$$du(x,y)=P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy.$$

Общее решение уравнения в полных дифференциалах определяется формулой

$$u(x,y)=C,$$

где C − произвольная постоянная.

Необходимое и достаточное условие

Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ имеют непрерывные частные производные в некоторой области D. Дифференциальное уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ будет являться уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, если справедливо равенство:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Алгоритм решения уравнения в полных дифференциалах

1. Сначала убедимся, что дифференциальное уравнение является *уравнением в полных дифференциалах*, используя *необходимое и достаточное условие*:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

2. Затем запишем систему двух дифференциальных уравнений, которые определяют функцию $u(x,y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases}.$$

3. Интегрируем первое уравнение по переменной x. Вместо постоянной C запишем неизвестную функцию, зависящую от y:

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y).$$

4. Дифференцируя по переменной y, подставим функцию $u(x,y)$ во второе уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y)\,dx + \varphi(y)\right] = Q(x,y).$$

Отсюда получаем выражение для производной неизвестной функции $\varphi(y)$:

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,dx\right).$$

5. Интегрируя последнее выражение, находим функцию $\varphi(y)$ и, следовательно, функцию $u(x,y)$:

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y).$$

6. Общее решение уравнения в полных дифференциалах записывается в виде:

$$u(x,y) = C.$$

Примечание: На шаге 3, вместо интегрирования первого уравнения по переменной x, мы можем проинтегрировать второе уравнение по переменной y. После интегрирования нужно определить неизвестную функцию $\psi(x)$.

Пример:

Решить дифференциальное уравнение $2xydx + (x^2 + 3y^2)dy = 0$.

Решение.

Данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, поскольку соответствующие частные производные равны:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy\right) = 2x.$$

Запишем следующую систему дифференциальных уравнений для определения функции $u(x,y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xy \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 3y^2 \end{cases}.$$

Интегрируя первое уравнение по x, получаем:

$$u\left(x,y\right) = \int 2xydx = x^2y + \varphi\left(y\right).$$

Подставляем выражение для $u(x,y)$ во второе уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y + \varphi\left(y\right)\right) = x^2 + 3y^2,$$

$$\cancel{x^2} + \varphi'\left(y\right) = \cancel{x^2} + 3y^2, \quad \text{или}$$

$$\varphi'\left(y\right) = 3y^2.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим неизвестную функцию $\varphi(y)$:

$$\varphi\left(y\right) = \int 3y^2dy = y^3,$$

так что общее решение данного уравнения в полных дифференциалах имеет вид:

$$x^2y + y^3 = C,$$

где C − произвольная постоянная.

Самостоятельная работа №21

Работа с дополнительной литературой по теме

«Уравнения вида $\frac{d^n y}{dx^n}$=f(x)»

Данные уравнения имеют вид

$$y^{(n)}\left(x\right) + a_1y^{(n-1)}\left(x\right) + \ldots + a_{n-1}y'\left(x\right) + a_ny\left(x\right) = f\left(x\right),$$

где $a_1, a_2,..., a_n$ − действительные или комплексные числа, а правая часть $f(x)$ является непрерывной функцией на некотором отрезке $[a, b]$.

Используя линейный дифференциальный оператор $L(D)$, равный

$$L\left(D\right) = D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}D + a_n,$$

неоднородное дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$L\left(D\right)y\left(x\right) = f\left(x\right).$$

Общее решение $y(x)$ неоднородного уравнения представляется в виде суммы общего решения $y_0(x)$соответствующего *однородного уравнения* и частного решения $y_1(x)$ неоднородного уравнения:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x).$$

При произвольной правой части $f(x)$ для поиска общего решения неоднородного уравнения используется*метод вариации постоянных*. В случае, если правая часть представляет собой произведение многочлена и экспоненциальной функции, частное решение удобнее искать *методом неопределенных коэффициентов*.

Метод вариации постоянных.

Предположим, что общее решение однородного дифференциального уравнения n-го порядка известно и представляется формулой

$$y_0(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + \ldots + C_n Y_n(x).$$

Метод вариации постоянных (или *метод Лагранжа*) заключается в том, что вместо постоянных чисел $C_1, C_2, \ldots, C_n$ мы рассматриваем функции $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$. Эти функции подбираются таким образом, чтобы решение

$$y = C_1(x)Y_1(x) + C_2(x)Y_2(x) + \ldots + C_n(x)Y_n(x)$$

удовлетворяло исходному неоднородному уравнению.

Производные n неизвестных функций $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ определяются из системы n уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)Y_1(x) + C_2'(x)Y_2(x) + \ldots + C_n'(x)Y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)Y_1'(x) + C_2'(x)Y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)Y_n'(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)Y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)Y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)Y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}.$$

Определителем этой системы является *вронскиан* функций $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, образующих фундаментальную систему решений. В силу линейной независимости этих функций определитель не равен нулю и данная система однозначно разрешима. Окончательные выражения для функций $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ находятся в результате интегрирования.

Метод неопределенных коэффициентов.

Если правая часть $f(x)$ дифференциального уравнения представляет собой функцию вида

$$P_n(x)\exp(\alpha x) \quad \text{или} \quad \left[P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\right]\exp(\alpha x),$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ − многочлены степени n и m, соответственно, то для построения частного решения можно использовать *метод неопределенных коэффициентов*.

В этом случае мы ищем частное решение в форме, соответствующей структуре правой части уравнения. Так, например, для функции

$$f(x) = P_n(x)\exp(\alpha x)$$

частное решение имеет вид

$$y_1(x) = x^S A_n(x)\exp(\alpha x),$$

где $A_n(x)$ − многочлен той же степени n, как и $P_n(x)$. Коэффициенты многочлена $A_n(x)$ определяются прямой подстановкой пробного решения $y_1(x)$ в неоднородное дифференциальное уравнение.

В так называемом *резонансном случае*, когда число α в показательной функции совпадает с корнем характеристического уравнения, в частном решении появляется дополнительный множитель x^s, где s равно кратности корня. В *нерезонансном случае* полагают $s = 0$.

Такой же алгоритм применяется, когда правая часть уравнения задана в виде

$$f(x) = \left[P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\right]\exp(\alpha x).$$

Здесь частное решение имеет аналогичную структуру и записывается как

$$y_1(x) = x^S\left[A_n(x)\cos(\beta x) + B_n(x)\sin(\beta x)\right]\exp(\alpha x),$$

где $A_n(x)$, $B_n(x)$ − многочлены степени n (при $n \geq m$), а степень s в дополнительном множителе x^s равна кратности комплексного корня $\alpha \pm \beta i$ в *резонансном случае* (т.е. при совпадении чисел α и β с комплексным корнем характеристического уравнения), и, соответственно, $s = 0$ в *нерезонансном случае*.

Принцип суперпозиции

Для линейных неоднородных уравнений справедлив принцип суперпозиции, который формулируется следующим образом. Пусть правая часть $f(x)$ представляет собой сумму двух функций:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Предположим, что $y_1(x)$ является решением уравнения

$$L(D)y(x) = f_1(x),$$

а функция $y_2(x)$ является, соответственно, решением второго уравнения

$$L(D)y(x) = f_2(x).$$

Тогда сумма функций

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

будет являться решением линейного неоднородного уравнения

$$L(D)y(x) = f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Пример:

Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' + 3y'' - 10y' = x - 3$.

Решение.

Сначала найдем общее решение однородного уравнения

$$y''' + 3y'' - 10y' = 0.$$

Вычислим корни характеристического уравнения:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 10\lambda = 0,$$

$$\lambda\left(\lambda^2 + 3\lambda - 10\right) = 0,$$

$$\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 5) = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -5.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_0(x) = C_1 + C_2\exp(2x) + C_3\exp(-5x),$$

где C_1, C_2, C_3 − произвольные числа.

В правой части уравнения содержится лишь многочлен. Однако, если учесть, что exp(0) = 1, то видно, что на самом деле мы имеем резонансный случай (в замаскированном виде), поскольку один из корней характеристического уравнения также равен нулю: $\lambda_1 = 0$. Поэтому частное решение будем искать в виде

$$y_1(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

Подставляем производные

$$y_1' = 2Ax + B, \quad y_1'' = 2A, \quad y_1''' = 0$$

в неоднородное уравнение и определяем коэффициенты A, B:

$$0 + 3\cdot 2A - 10(2Ax + B) = x - 3, \quad \Rightarrow 6A - 20Ax - 10B = x - 3,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -20A = 1 \\ 6A - 10B = -3 \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{20} \\ B = \dfrac{27}{100} \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{5}{100} \\ B = \dfrac{27}{100} \end{cases}.$$

Частное решение y_1 записывается как

$$y_1(x) = x\left(-\frac{5}{100}x + \frac{27}{100}\right) = \frac{x}{100}(27 - 5x).$$

Итак, общее решение неоднородного дифференциального уравнения выражается формулой

$$y(x) = y_0(x)y_1(x) = C_1 + C_2\exp(2x) + C_3\exp(-5x) + \frac{x}{100}(27 - 5x).$$

Самостоятельная работа №22

Работа с дополнительной литературой по теме

«Уравнения, допускающие понижение порядка»

В общем случае дифференциальное уравнение второго порядка можно записать в виде

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

где F − заданная функция указанных аргументов.

Если дифференциальное уравнение можно разрешить относительно второй производной y'', то его можно представить в следующем явном виде:

$$y'' = f(x, y, y').$$

В частных случаях функция f в правой части может содержать лишь одну или две переменных. Такие неполные уравнения включают в себя 5 различных типов:

$$y'' = f(x), \quad y'' = f(y), \quad y'' = f(y'), \quad y'' = f(x, y'), \quad y'' = f(y, y').$$

С помощью определенных подстановок эти уравнения можно преобразовать в уравнения первого порядка.

В случае произвольных дифференциальных уравнений второго порядка, их порядок можно понизить, если эти уравнения обладают определенной симметрией. Ниже мы обсудим 2 типа таких уравнений (случаи 6 и 7):

- Функция $F(x, y, y', y'')$ является однородной функцией аргументов y, y', y'';

- Функция $F(x, y, y', y'')$ является точной производной функции первого порядка $\Phi(x, y, y')$.

Итак, рассмотрим указанные случаи понижения порядка более подробно.

Случай 1. Уравнение вида $y''=f(x)$

Если дано уравнение $y'' = f(x)$, то его порядок можно понизить введением новой функции $p(x)$, такой, что $y' = p(x)$. В результате мы получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$p' = f(x).$$

Решая его, находим функцию $p(x)$. Затем решаем второе уравнение

$$y' = p(x)$$

и получаем общее решение исходного уравнения.

Случай 2. Уравнение вида $y''=f(y)$

Здесь правая часть уравнения зависит только от переменной y. Вводим новую функцию $p(y)$, полагая $y' = p(y)$. Тогда можно записать:

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p,$$

и уравнение принимает вид:

$$\frac{dp}{dy}p = f(y).$$

Решая его, находим функцию $p(y)$. Затем находим решение уравнения $y' = p(y)$, то есть функцию $y(x)$.

Случай 3. Уравнение вида $y''=f(y')$

В данном случае для понижения порядка вводим функцию $y' = p(x)$ и получаем уравнение

$$y'' = p' = \frac{dp}{dx} = f(p),$$

которое является уравнением первого порядка с разделяющимися переменными p и x. Интегрируя, находим функцию $p(x)$ и затем функцию $y(x)$.

Случай 4. Уравнение вида $y''=f(x,y')$

Используем подстановку $y' = p(x)$, где $p(x)$ − новая неизвестная функция, и получаем уравнение первого порядка

$$p' = \frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

Интегрируя, определяем функцию $p(x)$. Далее решаем еще одно уравнение 1-го порядка

$$y' = p(x)$$

и находим общее решение $y(x)$.

Случай 5. Уравнение вида $y''=f(y,y')$

Для решения такого уравнения, также как и в случае 2, вводим новую функцию $p(y)$, полагая $y' = p(y)$. Дифференцирование этого равенства по x приводит к уравнению

$$y'' = \frac{d\left(y'\right)}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p.$$

В результате наше исходное уравнение записывается в виде уравнения 1-го порядка

$$p\frac{dp}{dy} = f\left(y, p\right).$$

Решая его, находим функцию $p(y)$. Затем решаем еще одно уравнение первого порядка

$$y' = p\left(y\right)$$

и определяем общее решение $y(x)$.

Рассмотренные 5 случаев понижения порядка не являются независимыми. Исходя из структуры уравнений, ясно, что случай 2 следует из случая 5, а случай 3 вытекает из более общего случая 4.

Случай 6. Функция F(x, y, y', y'') является однородной функцией аргументов y, y', y''

Если левая часть дифференциального уравнения

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0$$

удовлетворяет условию однородности, т.е. для любого k справедливо соотношение

$$F\left(x, ky, ky', ky''\right) = k^m F\left(x, y, y', y''\right),$$

то порядок уравнения можно понизить с помощью подстановки

$$y = \exp\left(\int z dx\right).$$

После нахождения функции $z(x)$ исходная функция $y(x)$ находится интегрированием по формуле

$$y\left(x\right) = C_2 \exp\left(\int z dx\right),$$

где C_2 − постоянная интегрирования.

Случай 7. Функция F(x, y, y', y'') является точной производной

Если удается найти такую функцию $\Phi(x, y, y')$, не содержащую второй производной y'' и удовлетворяющую равенству

$$F\left(x, y, y', y''\right) = \frac{d}{dx}\Phi\left(x, y, y'\right),$$

то решение исходного уравнения представляется интегралом

$$\Phi\left(x, y, y'\right) = C.$$

Таким образом уравнение второго порядка можно привести к уравнению первого порядка.

В некоторых случаях левую часть исходного уравнения можно преобразовать в точную производную, используя интегрирующий множитель.

Пример:

Решить уравнение $y'' = \sin x + \cos x$.

Решение.

Данный пример относится к случаю 1. Введем функцию $y' = p(x)$. Тогда $y'' = p'$. Следовательно,

$$p' = \sin x + \cos x.$$

Интегрируя, находим функцию $p(x)$:

$$\frac{dp}{dx} = \sin x + \cos x, \quad \Rightarrow \; dp = (\sin x + \cos x)\,dx, \quad \Rightarrow \; \int dp = \int (\sin x + \cos x)\,dx, \quad \Rightarrow \; p = -\cos x + \sin x + C_1.$$

Учитывая, что $y' = p(x)$, проинтегрируем еще одно уравнение 1-го порядка:

$$y' = -\cos x + \sin x + C_1, \quad \Rightarrow \; \int dy = \int (-\cos x + \sin x + C_1)\,dx, \quad \Rightarrow \; y = -\sin x - \cos x + C_1 x + C_2.$$

Последняя формула представляет собой общее решение исходного дифференциального уравнения.

Самостоятельная работа №23

Решение домашней контрольной работы по теме

«Дифференциальные уравнения»

1 вариант

1) Найти частное решение дифференциального уравнения: $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$, y(1)=0.
2) Найти общие решения следующих дифференциальных уравнений: а) $(2\sqrt{xy} - y) + xy' = 0$;

   б) $y' - a\frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$;

   в) $y' + \frac{2y}{x} = 3x^2 y^{\frac{4}{3}}$;

   г) $\frac{xdy}{x^2 + y^2} + \left(1 - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx = 0$.
3) Найти общее решение дифференциального уравнения n-го порядка, допускающего понижение порядка производной: $y'' = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x+1)^3}$.
4) Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка: $y'' + 4y' + 5y = 0$; y(0)=-3; y'(0)=0.
5) Проинтегрировать линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, находя частное решение методом неопределенных коэффициентов: $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$.
6) Написать частное решение для линейного неоднородного дифференциального уравнения с неопределенными коэффициентами (числовых значений коэффициентов не находить): $y'' - 9y = e^{-3x}(x^2 + \sin 3x)$.
7) Проинтегрировать линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, находя частное решение методом вариации произвольных постоянных: $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$.

2 вариант

1) Найти частное решение дифференциального уравнения: $3e^x tgydx + (1+e^x)\frac{1}{\cos^2 y}dy = 0$, y(0)=$\frac{\pi}{4}$.
2) Найти общие решения следующих дифференциальных уравнений:
   а) $y'xy = x^2 + y^2$;
   б) $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2, y(0) = 2$;
   в) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;
   г) $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0.$
3) Найти частное решение дифференциального уравнения n-го порядка, допускающего понижение порядка производной: $yy'' - (y')^2 = y^3$,
   y(0)=-1/2; y'(0)=0 .
4) Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка: $y''' - 6y'' + 13y' = 0$.
5) Проинтегрировать линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, находя частное решение методом неопределенных коэффициентов: $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$.
6) Написать частное решение для линейного неоднородного дифференциального уравнения с неопределенными коэффициентами (числовых значений коэффициентов не находить): $y'' - 6y' + 13y = x^2e^{3x} - 3\cos 2x$.
7) Проинтегрировать линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, находя частное решение методом вариации произвольных постоянных: $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$.

Самостоятельная работа №24

Работа с дополнительной литературой по теме

«Повторные независимые испытания»

План выполнения работы

1.Изучите п. 7.5.1 стр.301-303 по учебнику «Математика», авторы С.Г.Григорьев, С.В.Иволгина.
2.Запишите в тетрадь формулу Бернулли.
3.Разберите примеры 1,2 и запишите их в тетрадь.
4.Решите самостоятельно задания:
Вариант 1 Задачи №1,3,5 стр.305
Вариант 2 Задачи №2,4,6 стр.305

Самостоятельная работа №25

Выполнение домашней контрольной работы по теме

«Классическое определение вероятности»

Вариант 1

1. В ящике имеется 4 белых и 7 чёрных шаров. Какова вероятность того, что наудачу вытянутый шар окажется белым?

2. Если событие достоверное, то чему равна его вероятность?

3. Какова вероятность невозможного события?

4. Какова вероятность выпадения орла при подбрасывании монеты?

5. Кубик подбрасывают один раз. Какова вероятность появления четырёх очков?

6. Какова вероятность того, что 4 очка появится дважды при двух бросаниях?

Вариант 2

1. В ящике имеется 5 синих ручек и 7 чёрных. Какова вероятность того, что наудачу вытянутая ручка окажется синей?

2. Какова вероятность невозможного события?

3. Если событие достоверное, то чему равна его вероятность?

4. Какова вероятность выпадения решки при подбрасывании монеты?

5. Кубик подбрасывают один раз. Какова вероятность появления чётных очков?

6. Какова вероятность того, что 2 очка появится дважды при двух бросаниях?

Самостоятельная работа №26

Выполнение домашней контрольной работы по теме

«Геометрические вероятности»

Вариант 1

1.В любые моменты времени промежутка длиной T равновозможны поступления в приемник двух независимых сигналов. Приемник не различает сигналов (забит), если разность между моментами поступления сигналов будет меньше τ. Определить вероятность того, что приемник будет забит.

2.В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длиной T. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t ($t < T$). Найти вероятность того, что сигнализатор срабатывает за время T, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

3.На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: B с координатой x и C с координатой y. Найти вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно построить треугольник.

4.На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу проставлены две точки: B с координатой x и. C с координатой y, причем $y \geq x$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC. меньше длины отрезка OB. (Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.)

Вариант 2

1.Два лица договорились о встрече в интервале времени $[t_1, t_2]$. Первый, прибывший на встречу, ждет другого в течение времени t, затем уходит. Моменты прихода каждого из двух лиц независимы и выбираются наудачу в заданном промежутке времени. Какова вероятность встречи двух лиц?

2.Два студента условились о встрече в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 15 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода в промежутке между 12 и 13 часами дня.

3.Задан отрезок длины l, на котором случайным образом выбираются две точки А и В. Найти вероятность того, что длина отрезка АВ будет меньше a ($a \leq l$).

4.Два приятеля условились о встрече в определенном месте между 12 и 14 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 20 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый наудачу выбирает момент своего прихода в промежутке между 12 и 14 часами дня.

Самостоятельная работа №27

Выполнение домашней контрольной работы по теме

«Теоремы сложения и умножения вероятностей»

Вариант 1

1. Три стрелка стреляют по одной мишени, и каждый попадает или промахивается независимо от результатов выстрелов других стрелков. Вероятности попадания в мишень для каждого из стрелков, соответственно, равны: 0,8; 0,7; 0,5. Определить вероятности следующих событий:

   а) все три стрелка попали в мишень;

   б) хотя бы один стрелок попал в мишень;

   в) в мишень попали два стрелка.

2.Истребитель атакует бомбардировщик, делает один выстрел и сбивает бомбардировщик с вероятностью p_1. Если этим выстрелом бомбардировщик не сбит, то он стреляет по истребителю и сбивает его с вероятностью p_2. Если истребитель этим выстрелом не сбит, то он ещё раз стреляет по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью p_3. Найти вероятности следующих событий:

   а) “сбит бомбардировщик”;

   б) “сбит истребитель”;

   в) “сбит хотя бы один самолёт”.

3.Бросаются три игральных кости. Какова вероятность того, что на одной из них выпадет единица, если на всех трёх костях выпали разные грани?

4.Доказать, что если события A и B независимы, то независимы события $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Вариант 2

1.Брошено три игральных кости. Найти вероятности следующих событий:

а) выпало три шестёрки;

б) выпало три шестёрки, если известно, что на одной из костей выпала шестёрка.

2.Из 20 студентов, находящихся в аудитории, 8 человек курят, 12 носят очки, а 6 и курят и носят очки. Одного из студентов вызвали к доске. Определим события А и В следующим образом: А = {вызванный студент курит}, В = {вызванный носит очки}. Установить, зависимы события А и В или нет. Сделать предположение о характере влияния курения на зрение.

3.Известно, что при бросании десяти игральных костей выпала хотя бы одна единица. Какова вероятность того, что выпало две или более единиц?

4.Бросают три монеты. Событие А — выпадение герба на первой и второй монетах. Событие В — выпадение цифры на третьей монете. Найти Р(А□В) и Р(А□В).

Самостоятельная работа №28

Выполнение домашней контрольной работы по теме

«Формула полной вероятности и формула Байеса»

Вариант 1

1.В урну, содержащую два шара, опущен белый шар, после чего из нее наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый, если равновозможны все предположения о первоначальном составе цветов.

2.Имеются три партии деталей по 20 штук в каждой. Число стандартных деталей в 1-й, 2-й и 3-й партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и вторично из той же партии наудачу извлекают деталь, которая также оказывается стандартной. Найти вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.

3.В поступивших на склад трех партиях деталей годные составляют 89%, 92% и 97% соответственно, а количества деталей в партиях относятся как 1 : 2 : 3. Чему равна вероятность, что случайно выбранная деталь окажется негодной? Какова вероятность, что при этом она принадлежит 3-й партии?

4.Из 12 лотерейных билетов 5 выигрышных. Билеты вытягивают по одному без возвращения. Во второй раз был вытянут выигрышный билет. Какова вероятность того, что и в первый раз был вытянут выигрышный билет?

Вариант 2

1.Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.5$.

2.Два из трех независимо работающих элементов устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0.2, 0.4 и 0.3.

3.Два автомата производят одинаковые детали, поступающие на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше, чем второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что она произведена первым автоматом.

4.Обнаружение воздушной цели проводится независимо двумя радиолокационными станциями. Вероятность обнаружения цели первой станцией P(A)=0.7, второй – P(B)=0.8. Какова вероятность, что цель будет обнаружена хотя бы одной станцией (событие C)?

Самостоятельная работа №29

Работа с дополнительной литературой по теме

«Непрерывная случайная величина»

План выполнения работы

1.Изучите п. 7.11 стр.332- 339по учебнику «Математика», авторы С.Г.Григорьев, С.В.Иволгина.
2.Запишите в тетрадь свойства интегральной функции распределения.
3.Запишите в тетрадь определения математического ожидания и дисперсии непрерывной случайной величины.
4.Разберите пример 1 и запишите его в тетрадь.
5.Решите самостоятельно задания:
Вариант 1 Задачи №1,3 стр.340
Вариант 2 Задачи №2,4 стр.340

Самостоятельная работа №30

Выполнение домашней контрольной работы по теме

«Законы распределения вероятностей дискретной случайной величины»

Вариант 1

1.В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных (такой закон называют гипергеометрическим). Определить функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию данной дискретной случайной величины.

2.Из двух орудий поочередно ведется стрельба по цели до первого попадания одним из орудий. Вероятность попадания в цель первым орудием равна 0,3; вторым – 0,7. Начинает стрельбу первое орудие. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа израсходованных снарядов первым орудием и определить функцию распределения.

3.Бросают N игральных костей. Составить закон распределения дискретной случайной величины Xi – числа выпавших очков на грани i-ой кости и определить функцию распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X – суммы числа очков на всех костях.

4.Определить закон распределения, функцию распределения и дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что математическое ожидание величины M(X) = 1,2.

Вариант 2

1.После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает дополнительные вопросы до тех пор, пока студент не сможет ответить на вопрос. Вероятность ответить на любой вопрос равна 0,9. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа дополнительных вопросов, заданных студенту. Определить функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию.

2.Бросают 2 игральные кости. Составить закон распределения числа выпавших очков, определить функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию данной дискретной случайной величины.

3.Вероятность наступления события в каждом испытании равна p. Испытания проводятся до тех пор, пока событие не наступит. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа испытаний, которые надо произвести, пока событие не наступит; определить функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию данной дискретной случайной величины.

4.Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1 равна 0,6. Найти закон распределения и функцию распределения дискретной случайной величины X, если математическое ожидание и дисперсия известны и равны соответственно M(X)=1,4 и D(X)=0,24.

Самостоятельная работа №31

Выполнение домашней контрольной работы по теме

«Дискретные распределения»

1. Задает ли закон распределения дискретной случайной величины каждая из следующих таблиц:

а)

1. X 2. 0 3. 1 4. 2 5. 3 6. 4

7. P 8. 0,05 9. 0,15 10. 0,20 11. 0,25 12. 0,35

б)

13. X 14. 5 15. 6 16. 7 17. 8 18. 9

19. P 20. 0,1 21. 0,2 22. 0,3 23. 0,4 24. 0,15

2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

25. X 26. 1 27. 2 28. 3 29. 4 30. 5

31. P 32. p1 33. 0,15 34. 0,30 35. 0,25 36. p5

Найдите вероятность p1=P(X=1) и p5=P(X=5), если известно, что p5 в 2 раза больше p1.

3. Подбрасываются две симметричные монеты, подсчитывается число цифр на обеих верхних сторонах монет. Запишите закон распределения случайной величины X - число выпадения цифры на обеих монетах.

4. В урне 7 шаров, из которых 4 голубых, а остальные красные. Из этой урны извлекаются 3 шара. Найдите закон распределения дискретной случайной величины X - число голубых шаров в выборке.

5. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Из этой партии наудачу взято 2 детали. Найдите закон распределения дискретной случайной величины, равной числу

стандартных деталей в выборке.
6. Подбрасывается 2 игральных кубика, подсчитывается число очков на верхних гранях кубиков. Найдите закон распределения дискретной случайной величины, равной сумме очков, выпавших на двух кубиках.

Самостоятельная работа №32

Выполнение домашней контрольной работы по теме

«Элементы математической логики»

1. Какие из следующих предложений являются высказываниями:

   1) Москва – столица России;
   2) Студент физико-математического факультета;
   3) $\sqrt{3}+2\sqrt{7}-28$;
   4) Луна есть спутник Марса;
   5) $a>0$.

2. Известно, что $x \to y$ имеет значения 1. Что можно сказать о значениях $z \to (x \to y)$; $\overline{x \to y} \to y$; $(x \to y) \to z$?

3. Установить, какие из следующих формул являются тождественно истинными, тождественно ложными:

- $\overline{(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))}$;
- $(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \vee p) \to (p_2 \vee p))$;

4. Пусть p и q обозначают высказывания:

p – «Я учусь в школе»,

q – «Я люблю математику».

Прочитайте следующие сложные высказывания:

1) $\overline{p}$; 2) $\overline{\overline{p}}$; 3) $p \,\&\, q$; 4) $p \,\&\, \overline{q}$; 5) $\overline{p} \,\&\, q$; 6) $\overline{p \,\&\, q}$.

4.Доказать тождественную истинность или тождественную ложность формул:

- $(x \to (y \to z)) \to (x \wedge y \to z)$;
- $(x \wedge y \to z) \to (x \to (y \to z))$;

5. Упростить:

   а) $\left(x \to \overline{y} \to \left(z \to y \vee \overline{y \vee x}\right)\right) \,\&\, \left(x \vee \overline{x \to (x \to x)}\right) \to y$;
   б) $\left(x \,\&\, \overline{x \,\&\, \overline{x} \to y \,\&\, \overline{y}} \to z\right) \vee x \vee (y \,\&\, z) \vee (y \,\&\, z)$;