**Областное государственное автономное
профессиональное образовательное учреждение
“Алексеевский агротехнический техникум”**

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ ЕН.01 МАТЕМАТИКА

2023г.

Тема 1.1 «Линейная алгебра»

Практическое занятие №1

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся решать системы линейных уравнений методом Гаусса.

Порядок выполнения.

1. Повторить теоретический материал.
2. Разобрать предложенные примеры.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Произведем элементарные преобразования над строчками расширенной матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Осуществляя обратный ход, находим $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

3. Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

Найти решения линейных систем уравнений, используя метод Гаусса:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -4 \\ 2x_1 + x_2 = -5 \end{cases};$

2. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 4x + 5y + 6z = 8 \\ 7x + 8y = 2 \end{cases};$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 \qquad\quad = 5 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 16 \\ 3x - 2y - 5z = 12 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ 2x - y - 3z = -1 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 20 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$.

4.Ответить на контрольные вопросы.

1.Что называется матрицей?

2.Измениться ли матрица, если каждый элемент столбца умножить на постоянное число?

3.Какие преобразования матрицы называются элементарными?

4.Сколько решений может иметь квадратная система?

5.Какая матрица называется треугольной?

Практическое занятие №2

Действия над матрицами. Вычисление обратной матрицы.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся выполнять линейные операции над матрицами, умножать матрицы и находить обратную матрицу.

Порядок проведения.

1. **Повторить теоретический материал.**
2. **Разобрать предложенные примеры.**

Пример 1. Даны матрицы

$A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 21 & -16 & 3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -7 & 2 & 13 \\ 3 & -5 & -17 \end{pmatrix}$, их сумма $C=A+B$

$$C=\begin{pmatrix} 8+(-7) & 4+2 & 5+13 \\ 21+3 & -16+(-5) & 3+(-17) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 18 \\ 24 & -21 & -14 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Даны матрицы

$A=\begin{pmatrix} 17 & 20 & 5 \\ 3 & -8 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 3 & 13 & 7 \\ -4 & 31 & 11 \\ -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, их сумма $C=A+B$

$$C=\begin{pmatrix} 17+3 & 20+13 & 5+7 \\ 3+(-4) & -8+31 & 4+11 \\ 6+(-5) & 2+0 & 1+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 & 33 & 12 \\ -1 & 23 & 15 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Даны матрицы

$A=\begin{pmatrix} 5 & 10 & 12 \\ 3 & 5 & 20 \\ 0 & -4 & 11 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 7 & 4 & 10 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, их разность $C=A-B$

$$C=\begin{pmatrix} 5-2 & 10-3 & 12-8 \\ 3-7 & 5-4 & 20-10 \\ 0-5 & -4-3 & 11-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ -4 & 1 & 10 \\ -5 & -7 & 12 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.

Найти произведение

$$7\cdot\begin{pmatrix} 8 & -3 & 16 \\ -3 & 1 & 10 \\ 7 & 11 & 21 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7\cdot 8 & 7\cdot(-3) & 7\cdot 16 \\ 7\cdot(-3) & 7\cdot 1 & 7\cdot 10 \\ 7\cdot 7 & 7\cdot 11 & 7\cdot 21 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 56 & -21 & 112 \\ -35 & 7 & 70 \\ 49 & 77 & 147 \end{pmatrix}.$$

Пример 5.

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2\\2&1\\4&3\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot2+3\cdot4 & 1\cdot2+2\cdot1+3\cdot3\\4\cdot3+5\cdot2+6\cdot4 & 4\cdot2+5\cdot1+6\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&13\\46&31\end{pmatrix}.$$

Пример 6.

$A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&1\\-1&0\end{pmatrix}$;

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot3+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot1+(-1)\cdot0\\2\cdot3+3\cdot(-1) & 2\cdot1+3\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1\\3&2\end{pmatrix}.$$

Пример 7.

$A=\begin{pmatrix}5&8&-4\\6&10&-5\\-4&7&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&2&5\\4&-1&0\\9&3&5\end{pmatrix}$;

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}5\cdot3+8\cdot4+(-4)\cdot9 & 5\cdot2+8\cdot(-1)+(-4)\cdot3 & 5\cdot5+8\cdot0+(-4)\cdot5\\6\cdot3+10\cdot4+(-5)\cdot9 & 6\cdot2+10\cdot(-1)+(-5)\cdot3 & 6\cdot5+10\cdot0+(-5)\cdot5\\-4\cdot3+7\cdot4+3\cdot9 & -4\cdot2+7\cdot(-1)+3\cdot3 & -4\cdot5+7\cdot0+3\cdot5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}15+32-36 & 10-8-12 & 25-20\\18+40-45 & 12-10-15 & 30-25\\-12+28-27 & -8-7+9 & -20+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-10&5\\13&-13&5\\43&-6&-5\end{pmatrix}.$$

Пример 8. Для матрицы

$A=\begin{pmatrix}2&1&-3\\1&-2&2\\1&1&3\end{pmatrix}$, найти обратную.

Решение.

Так как определитель матрицы отличен от нуля: $\Delta=-26$, то матрица А имеет обратную. Для нахождения обратной матрицы A^{-1} вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-2&2\\1&3\end{vmatrix}=-8,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}1&-3\\1&3\end{vmatrix}=-6,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}1&-3\\-2&2\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=-1,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2&-3\\1&3\end{vmatrix}=9,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2&-3\\1&2\end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1&-2\\1&1\end{vmatrix}=3,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2&1\\1&-2\end{vmatrix}=-5.$$

Матрица A^{-1}, обратная к A, имеет вид

$$A^{-1}=-\frac{1}{26}\begin{pmatrix}-8&-6&-4\\-1&9&-7\\3&-1&-5\end{pmatrix}.$$

3. Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

1. Выполнить указанные действия над матрицами:

а). $\begin{pmatrix}3&17\\2&15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8&-4\\11&7\end{pmatrix}$.

б). $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 11 & 1 & 23 \\ 14 & 18 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 5 & 17 \\ -3 & 2 & 11 \\ -14 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

в). $7 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 16 & 1 & 5 \\ 3 & 17 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Проверить некоммутативность умножения матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Показать, что произведение $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ не существует.

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -8 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$;

з) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -6 & 11 & 10 \end{pmatrix}^2$;

и) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2$.

4. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

4.Ответить на контрольные вопросы.

1. Понятие матрицы.
2. Элементарные преобразования матриц.
3. Действия над матрицами (сложение, вычитание, умножение матрицы на число, умножение матрицы на матрицу) и их свойства.
4. Линейная комбинация матриц.

Практическое занятие №3

Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся решать системы линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Порядок проведения.

1. Повторить теоретический материал.

2. Разобрать предложенные примеры.

Пример. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$$

1) Найдем матрицу A^{-1}, обратную к матрице системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 8 = -48,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = (-4 \cdot 0 - 6 \cdot 7) = 42,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = -3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 8 \cdot 3 = 24,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 3 \cdot 7 = -21,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 - 7 \cdot 2 = 6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = -3,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = -3.$$

3) Запишем матрицу

$$\widetilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

4) Найдем матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48/27 & 24/27 & -3/27 \\ 42/27 & -21/27 & 6/27 \\ -3/27 & 6/27 & -3/27 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -16/9 & 8/9 & -1/9 \\ 14/9 & -7/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix}.$$

5) Найдем решение системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -16/9 & 8/9 & -1/9 \\ 14/9 & -7/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-16 \cdot 6 + 8 \cdot 9 - 1 \cdot (-6))/9 \\ (14 \cdot 6 - 7 \cdot 9 + 2 \cdot (-6))/9 \\ (-1 \cdot 6 + 2 \cdot 9 - 1 \cdot (-6))/9 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} (-96 + 72 + 6)/9 \\ (84 - 63 - 12)/9 \\ (-6 + 18 + 6)/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, $x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2.$

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

Найти решения линейной системы уравнений, используя обратную матрицу:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 = -4 \\ 2x_1 + x_2 = -5 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 4x + 5y + 6z = 8 \\ 7x + 8y \qquad = 2 \end{cases}$;

3.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 \qquad = 5 \end{cases}$$

;

4. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ -5x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -2 \\ 8x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -5 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8 \\ 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$.

4.Ответить на контрольные вопросы.

1.Что такое обратная матрица?

2.Как находить алгебраические дополнения?

Практическое занятие №4

Вычисление определителей второго и третьего порядков.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся вычислять определители второго и третьего порядков, выполнять действия над определителями.

Порядок проведения.

1.Повторить теоретический материал.

2.Разобрать предложенные примеры.

Пример 1. Вычислить определитель третьего порядка $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}$

Решение. $\Delta = 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}$ =1·0+1·3+3·6=21 или

$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix} = 4-1+24-6+4-4=21.$$

Пример 2. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

Решение

$\mathbf{A_{11}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{12}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{13}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}\mathbf{=0;}$

$\mathbf{A_{21}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{22}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{23}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}\mathbf{=0;}$

$\mathbf{A_{31}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{32}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\mathbf{=0;}$ $\mathbf{A_{33}=(-1)^{1+1}}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\mathbf{=0.}$

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

1.Вычислить определитель с помощью правила «треугольника».
2.Вычислить определитель с помощью разложения его по элементам строки или столбца.
3.Выписать все миноры данного определителя.

1. $\begin{vmatrix}2 & -1 & 7\\ 4 & 3 & -5\\ -6 & -4 & 3\end{vmatrix}$	**2.** $\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & -5 & 8\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}$	**3.** $\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & -4 & 7\\ -3 & 12 & -15\end{vmatrix}$	**4.** $\begin{vmatrix}4 & -2 & 4\\ 10 & 2 & 12\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}$	**5.** $\begin{vmatrix}-2 & 0 & 2\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	**7.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	**8.** $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$	**9.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	**10.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
11. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$	**12.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	**13.** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$	**14.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$	**15.** $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$
16. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	**17.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -5 \\ -6 & -4 & 3 \end{vmatrix}$	**18.** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	**19.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$	**20.** $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$
21. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$	**22.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	**23.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	**24.** $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$	**25.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$
26. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$	**27.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$	**28.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	**29.** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$	**30.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$

4.Ответить на контрольные вопросы.

1.Что такое определитель второго порядка?

2.Что такое определитель третьего порядка?

3.Что такое алгебраическое дополнение? Как его вычислить?

4.Как вычислить определитель третьего порядка с помощью правила «треугольника»?

Практическое занятие №5

Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся решать системы линейных уравнений методом Крамера.

Порядок проведения.

1.Повторить теоретический материал.

2.Разобрать предложенные примеры.

Пример. Решить систему методом Крамера.

[redacted]

[redacted], значит, система имеет единственное решение.

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

Ответ: [redacted].

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

Решить системы линейных уравнений методом Крамера

1. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y + z = 3 \\ x + z = 2 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} 5x + 8y - z = -7 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$.

4. Ответить на контрольные вопросы.

1.Как составить главный определитель системы?
2.Какие выводы можно сделать о системе, если главный определитель равен нулю?
3.Является ли система совместной, если она имеет бесчисленное множество решений?
4.Как называется система, если она не имеет решений?

Тема 2.1 «Комплексные числа»

Практическое занятие №6

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся выполнять действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

Порядок выполнения.

1. Повторить теоретический материал.

2. Разобрать предложенные примеры.

Пример 1

(3+2i) + (-1+3i) = (3-1) + (2+3)I = 2 + 5i

Пример 2

(3+2i)(-1+3i) = (-3-6) + (9-2)i = 9 - 7i

Пример 3

(3+2i) - (-1+3i) = (3 + 1) + (2 – 3)i = 4 + (-1)i = 4 – i

Пример 4

$$\frac{1+2i}{3+4i} = \frac{1\cdot 3+2\cdot 4}{3^2+4^2}+\frac{2\cdot 3-1\cdot 4}{3^2+4^2}\mathrm{I} = \frac{11}{25}+\frac{2}{25}\mathrm{i}.$$

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

1.Вычислите:

1)(3+2i)+(1+5i)
2)(3-11i)+(4+15i)
3)(3+2i)-(1+5i)
4)(3-11i)-(4+15i)
5)(3+2i)*(1+5i)
6)(3-i)*(4+5i)
7)(3+2i): (1+5i)
8)(3-11i): (4+15i)
9)$(5+2i)^2$
10)$(3+i)^2+(3-i)^2$
11)(-5+i)+(1-4i)
12)(8-i)+(-8+i)
13)(-5+i)-(1-4i)
14) (8+i)-(-8+i)
15) (-5+i)*(1-4i)
16) (8+i)*(-8+i)
17) (-5+i): (1-4i)
18) (8+i): (-8+i)
19) $(3-2i)^2$
20) $(3-2i)^2-(3+2i)^2$

2.Упростите выражение:

1)(x+i)(x-i)
2)(3x+yi)(3x-yi)
3)(x+yi)(x-yi)
4)(x-2yi)(x+2yi)

3.Пусть a и b – действительные числа. Приведите к виду a+bi выражение:

1) $\frac{1}{i}$

2) $-\frac{1}{i}$

3) $\frac{1}{1+i}$

4) $\frac{1}{1-i}$

4.Ответить на контрольные вопросы.

1.Что представляет собой алгебраическая форма комплексного числа?
2.Как складывать и умножать комплексные числа, записанные в алгебраической форме?

Практическое занятие №7

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся выполнять действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Порядок выполнения.

1. **Повторить теоретический материал.**
2. **Разобрать предложенные примеры.**

Пример 1.

Найдем аргумент комплексного числа $z = 3 + 4i$.

Напишем равенства $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ и $\sin\varphi = \frac{4}{5}$. Ясно, что угол $\varphi_0 = \arcsin\frac{4}{5}$ им удовлетворяет, и так как $0 \le \varphi_0 < 2\pi$, то φ_0 - главный аргумент числа z. Следовательно, аргументом числа z является любой из углов

$$\varphi = \arcsin\frac{4}{5} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Пример 2.

Вычислим $(1 + i)^7$.

Сначала запишем число $z = 1 + i$ в тригонометрической форме:

$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $z = \sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

Теперь возведем его в степень 7 по формуле Муавра:

$z^7 = (\sqrt{2})^7\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = 8\sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 8 - 8i$.

Пример 3.

Выразим $\sin 3x$ и $\cos 3x$ через $\sin x$ и $\cos x$ соответственно.

По формуле Муавра $(\cos x + i\sin x)^3 = \cos 3x + i\sin 3x$.

В тоже время по формуле куба суммы получим

$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3\cos^2 x(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3 =$

$(\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x) + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)$.

По правилу равенства комплексных чисел имеем

$\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x$, $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$.

Применяя основное тригонометрическое тождество, эти формулы можно записать так:

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

1.Запишите в тригонометрической форме комплексное число z, укажите его главный аргумент :

1) $z = \cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})$;	7) $z = -2$;	13) $z = \sqrt{3} + i$;
2) $z = -3(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$;	8) $z = 1 - i$;	14) $z = -\sqrt{3} - i$;
3) $z = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$;	9) $z = i$;	15) $z = \sqrt{3} - i$;
4) $z = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$;	10) $z = -1 + i$;	16) $z = 1 + \sqrt{3}\,i$;
5) $z = 1$;	11) $z = -3i$;	17) $z = -\sqrt{3} + i$;
6) $z = 1 + i$;	12) $z = -1 - i$;	18) $z = 1 - \sqrt{3}\,i$.

2.Возведите в степень 3 комплексное число:

1) $\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$;

2) $2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$;

3) $3(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$;

4) $4(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$.

4.Ответить на контрольные вопросы.
1.Что представляет собой тригонометрическая форма комплексного числа?
2.Как складывать и умножать комплексные числа, записанные в тригонометрической форме?
3.Как возводить в степень комплексные числа, представленные в тригонометрической форме?

Практическое занятие №8

Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся выполнять действия над комплексными числами, заданными в показательной форме**.**

Порядок выполнения.

1. Повторить теоретический материал.
2. Разобрать предложенные примеры.

Пример 1. Даны два комплексных числа z_1 и z_2.

$$z_1 = 4\left(\cos 150^0 + i \cdot \sin 150^0\right) \qquad z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos 90^0 + i \cdot \sin 90^0\right)$$

Произвести действия $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2 в тригонометрической и показательной форме. Результат записать в алгебраической форме.

Решение.

Из записи чисел имеем: $r_1 = 4, \quad r_2 = 1/2, \quad \varphi_1 = 150^0, \quad \varphi_2 = 90^0.$

Тригонометрическая форма:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) = 4 \cdot \frac{1}{2}\left(\cos\left(150^0 + 90^0\right) + i \cdot \sin\left(150^0 + 90^0\right)\right) =$$

$$= 2\left(\cos 240^0 + i \cdot \sin 240^0\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -1 - \sqrt{3}i\ .$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right) = 4 : \frac{1}{2}\left(\cos\left(150^0 - 90^0\right) + i \cdot \sin\left(150^0 - 90^0\right)\right) =$$

$$= 8\left(\cos 60^0 + i \cdot \sin 60^0\right) = 8\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4 + 4\sqrt{3}i\ .$$

Показательная форма:

$$z_1 = 4e^{i \cdot 150^0} \qquad z_1 = \frac{1}{2}e^{i \cdot 90^0}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{i(150^0 + 90^0)} = 2e^{i240^0} =$$

$$2\left(\cos 240^0 + i \cdot \sin 240^0\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -1 - \sqrt{3}i\ .$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = 4 : \frac{1}{2}e^{i\left(150^0 - 90^0\right)} = 8e^{i60^0} = 8\left(\cos 60^0 + i \cdot \sin 60^0\right) =$$

$$= 8\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4 + 4\sqrt{3}i.$$

Ответ. $z_1 \cdot z_2 = -1 - \sqrt{3}i$, $\frac{z_1}{z_2} = 4 + 4\sqrt{3}i.$

Как видно из примеров, **показательная форма упрощает запись вычислений, и оформление решения делает более компактным**.

Пример 2. Вычислить $\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^{10}$.

Решение.

Запишем данное комплексное число в показательной форме:

$z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, значит, $x = \sqrt{2}, \quad y = -\sqrt{2}$;

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$;

$$tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 \quad \Rightarrow \varphi = arctg(-1) = -\frac{\pi}{4} = -45^0$$

Таким образом, показательная форма данного комплексного числа имеет вид:

$z = re^{i\varphi} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Вычислим z^{10}:

$$z^{10} = r^{10} e^{i \cdot 10\varphi} = 2^{10} e^{i\left(-\frac{\pi}{4} \cdot 10\right)}$$

Переведем полученный результат в алгебраическую форму $x + iy$.

$$1024 e^{i\left(-\frac{5\pi}{2}\right)} = 1024\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1024(0 + i \cdot (-1)) = -1024i.$$

Ответ: $\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)^{10} = -1024i$.

Пример 3. Найти все корни уравнения $z^4 - 16 = 0$.

Решение.

Запишем число 16 в показательной форме: $16 = 16e^{i0^0}$, т.е. $r = 16$, $\varphi = 0^0$. Тогда

$$z = \sqrt[n]{r}\ e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

$$z = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16}\ e^{i\frac{0 + 2\pi k}{4}} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

При $k = 0$:

$$z_1 = \sqrt[4]{16} e^{i\frac{0}{4}} = 4e^{i0} = 2(\cos 0 + i \cdot \sin 0) = 2(1 + i \cdot 0) = 2$$

При $k = 1$:

$$z_2 = \sqrt[4]{16}\ e^{i\frac{0 + 2\pi}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i \cdot 1) = 2i$$

При $k = 2$:

$$z_3 = \sqrt[4]{16}\ e^{i\frac{0 + 4\pi}{4}} = 2e^{i\pi} = 2(\cos\pi + i \cdot \sin\pi) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2$$

При $k = 3$:

$$z_4 = \sqrt[4]{16}\ e^{i\frac{0 + 6\pi}{4}} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2(0 + i \cdot (-1)) = -2i$$

Ответ. $z_1 = 2$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2$, $z_4 = -2i$.

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

1. Даны два комплексных числа z_1 и z_2.

Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1 / z_2

1)	$z_1 = 2 - 8i$ $z_2 = 3 - 2i$	2)	$z_1 = 1 - 2i$ $z_2 = 1 + 2i$	3)	$z_1 = 2 - i$ $z_2 = 2i - 3$
4)	$z_1 = 4 + 5i$ $z_2 = 6 - 9i$	5)	$z_1 = 3$ $z_2 = 1 - 3i$	6)	$z_1 = 3 - 4i$ $z_2 = 3 + 4i$
7)	$z_1 = 3 - 5i$ $z_2 = 2i - 4$	8)	$z_1 = 4$ $z_2 = 2i$	9)	$z_1 = -2i$ $z_2 = 1 - i$

2. Выполнить действия:

1) $\frac{(1+2i)(2+i)}{3-2i}$ 2) $\frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$ 3) $\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$

3. Вычислить:

1) i^{16} 2) i^{11} 3) i^{22} 4) i^{37} 5) i^{14} 6) i^{24} 7) i^{34} 8) i^{35}

9) $i^{52} + 2 \cdot i^{83} - 3 \cdot i^{61} + 5 \cdot i^{38}$ 10) $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54}$

11) $i + i^{21} - 4i^{37} - i^{42} + 3i^{55}$ 12) $i^{42} + 2 \cdot i^{53} - 3 \cdot i^{71} + 5 \cdot i^{108}$

13) $\frac{2-3i}{5+i^{11}}$ 14) $\frac{1+i^{17}}{i^{23}}$

4. Изобразите на комплексной плоскости числа

1) $z = 3 + 2i$ 2) $z = -4 + 3i$ 3) $z = 2$ 4) $z = -6i$

5. Задано комплексное число z . Найти $|z|$ и $\arg z$.

1) $z = 1 + i$ 2) $z = 2i$ 3) $z = -2$ 4) $z = -\sqrt{3} + i$

6. Перевести в тригонометрическую и в показательную форму комплексное число

1) $z = 1 - i$ 2) $z = \sqrt{3} + i$ 3) $z = 5$ 4) $z = -4i$

5) $z = -1 + i\sqrt{3}$ 6) $z = 5 - 5i$

4.Ответить на контрольные вопросы.

1.Что представляет показательная форма комплексного числа?

2.Какие действия можно выполнять с комплексными числами, записаннымив показательной форме?

Тема 3.1 «Дифференциальное и интегральное исчисление»

Практическое занятие №9-10

Вычисление пределов функций с использованием первого и второго замечательного пределов.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся вычислять пределы функций, используя первый и второй замечательный пределы.

Порядок выполнения.

1. **Повторить теоретический материал.**
2. **Разобрать предложенные примеры.**

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2-5x}{\sin 3x}$.

Решение. Подстановка вместо *x* нуля приводит к неопределённости:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

В знаменателе - синус, следовательно, выражение можно привести к первому замечательному пределу. Начинаем преобразования:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(4x-5)}{\sin 3x}.$$

В знаменателе - синус трёх икс, а в числителе всего лишь один икс, значит, нужно получить три икс и в числителе, а, когда тройки сократятся, получится первый замечательный предел в чистом виде. Умножаем икс на три и тут же делим и далее решаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(4x-5)}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\bullet\frac{1}{3}(4x-5)}{\sin 3x}=$$
$$=1\bullet\frac{1}{3}\bullet(-5)=-\frac{5}{3}.$$

Пример 2. Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$.

Решение. Непосредственная подстановка вновь приводит к неопределённости "нуль делить на нуль":

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Чтобы получить первый замечательный предел, нужно, чтобы икс под знаком синуса в числителе и просто икс в знаменателе были с одним и тем же коэффициентом. Пусть этот коэффициент будет равен 2. Для этого представим нынешний коэффициент при иксе как $3=\frac{3}{2}\bullet 2$ и далее, производя действия с дробями, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{3}{2}\bullet 2x}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{1}\bullet\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

Пример 3. Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}$.

Решение. При подстановке вновь получаем неопределённость "нуль делить на нуль":

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Наверное, вам уже понятно, что из исходного выражения можно получить первый замечательный предел, умноженный на первый замечательный предел. Для этого раскладываем квадраты икса в числителе и синуса в знаменателе на одинаковые множители, а чтобы получить у иксов и у синуса одинаковые коэффициенты, иксы в числителе делим на 3 и тут же умножаем на 3. Получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\bullet x}{\sin\left(\frac{x}{3}\right)\bullet\sin\left(\frac{x}{3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\bullet\frac{x}{3}\bullet 3\bullet\frac{x}{3}}{\sin\left(\frac{x}{3}\right)\bullet\sin\left(\frac{x}{3}\right)}=3\bullet 3=9.$$

Пример 4. Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

Решение. Вновь получаем неопределённость "нуль делить на нуль":

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Можем получить отношение двух первых замечательных пределов. Делим и числитель, и знаменатель на икс. Затем, чтобы коэффициенты при синусах и при иксах совпадали, верхний икс умножаем на 2 и тут же делим на 2, а нижний икс умножаем на 3 и тут же делим на 3. Получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}\bullet 2x}}{\frac{\sin 3x}{\frac{1}{3}\bullet 3x}}=\frac{\frac{1}{1\bullet\frac{1}{2}}}{\frac{1}{1\bullet\frac{1}{3}}}=\frac{1\bullet 2}{1\bullet 3}=\frac{2}{3}.$$

Пример 5. Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}3x}{x}$.

Решение. И вновь неопределённость "нуль делить на нуль":

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Помним из тригонометрии, что тангенс - это отношение синуса к косинусу, а косинус нуля равен единице. Производим преобразования и получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\cos 3x\bullet x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\cos 3x\bullet 3x}\bullet 3=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\bullet\lim\frac{3}{\cos 3x}=3.$$

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}x^2\mathrm{ctg}2x$.

Решение. Тригонометрическая функция под знаком предела вновь наталкивает на мысль о применении первого замечательного предела. Представляем его как отношение синуса к косинусу.

$$\lim_{x\to 0}x^2\mathrm{ctg}\,2x=\lim_{x\to 0}x^2\bullet\frac{\cos 2x}{\sin 2x}.$$

Так как $x\to 0$, то $\cos 2x=1$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\bullet x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\bullet\frac{x\bullet 2x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}x\bullet 1=0.$$

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{x+3}}{\sin 2x}$.

Решение. И вновь неопределённость "ноль делить на ноль" и синус под знаком предела. Значит надо приводить к первому замечательному пределу. Умножим числитель и знаменатель на выражение сопряжённое числителю и получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{x+3}}{\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{x+3}\right)}{\sin 2x\left(\sqrt{3}+\sqrt{x+3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3-(x+3)}{\sin 2x\left(\sqrt{3}+\sqrt{x+3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sin 2x\left(\sqrt{3}+\sqrt{x+3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2(-x)\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sin 2x\left(\sqrt{3}+\sqrt{x+3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\bullet\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sin 2x\left(\sqrt{3}+\sqrt{x+3}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}+\sqrt{x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{x+3}\right)}=-\frac{1}{2\bullet 2\sqrt{3}}=-\frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

Пример 8. Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x+1}-1}$.

Решение. Бороться с неопределённостью "ноль делить на ноль" будем приведением к первому замечательному пределу. Вспоминаем формулу тригонометрической единицы и подставляем её. Потом вспоминаем, что косинус в квадрате нуля и просто косинус нуля равны единице, а они у нас с противоположными знаками, значит взаимно уничтожаются. Затем умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое знаменателю. И дальнейшие преобразования. Всё выше описанное выглядит так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x+1}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\cos x}{\sqrt{x+1}-1}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x+1}-1}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\bullet\sin x}{\frac{x\bullet x}{x}}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\bullet\sin x\bullet x}{x\bullet x}=2\bullet 0=0.$$

Пример 9. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{3x}$.

Решение. Подстановка вместо *x* бесконечности приводит к неопределённости:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{3x}=\left(1^{\infty}\right).$$

Значит, нужно привести выражение ко второму замечательному пределу. Облегчим себе жизнь перед заменой сложной функции более простой, представив степень $3x=6x\bullet\frac{1}{2}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{6x\bullet\frac{1}{2}}.$$

Заменяем функцию *6x* переменной *n*, которая также стремится к бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{6x}\right)^{6x\bullet\frac{1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\bullet\frac{1}{2}}.$$

Это второй замечательный предел, индивидуальна только степень числа *e*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\bullet\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

Пример 10. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+6}{x-2}\right)^{3x+2}$.

Решение. Непосредственная подстановка приводит к неопределённости "бесконечность делить на бесконечность в степени бесконечность":

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+6}{x-2}\right)^{3x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}.$$

Бесконечность в показателе степени - признак того, что выражение можно привести к отношению двух вторых замечательных пределов. В самом деле, если числитель и знаменатель поделить почленно на *x*, то слева и в числителе и в знаменателе будет уже по единице:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+6}{x-2}\right)^{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{x}+\frac{6}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}\right)^{3x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{6}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{3x+2}.$$

Почти второй замечательный предел. А чтобы это было не почти, а вторым замечательным пределом, нужно, чтобы во вторых слагаемых и в числителе, и в знаменателе были единицы. Для этого произведём замены функций:

$$\frac{6}{x}=\frac{1}{n}\quad\Rightarrow x=6n\quad\Rightarrow 3x+2=18n+2.$$

$$-\frac{2}{x}=\frac{1}{t}\quad\Rightarrow x=-2t\quad\Rightarrow 3x+2=-6t+2.$$

Подставляем и получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{6}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^{3x+2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{18n+2}}{\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-6t+2}}.$$

Это уже отношение вторых замечательных пределов, а степени выражений в числителе и знаменателе - индивидуальны:

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{18n+2}}{\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-6t+2}}=\frac{e^{18}}{e^{-6}}=e^{18-(-6)}=e^{24}$$

.

Пример 11. Найти предел

[redacted]

Решение. Применяем разновидность второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{2/(2x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{1/(2x)}\right]^2=$$

$$\left[\lim_{2x\to 0}(1+2x)^{1/(2x)}\right]^2=e^2.$$

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

Вычислите пределы

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x-2}{x^2+6x-5}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x}{3x^3-5x+1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+6x-7}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 5x}$.

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ctg\,2x}{5x}$.

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^x$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}(1+\frac{1}{x})^x$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{5x}$

9 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x+1}{4x^2}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-\frac{1}{3}x}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-2}{6x^2+x-5}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x-8}{3x^4-5x^2+7}$.

12. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{tg\,5x}$.

14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ctg\,4x}{5x}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^x$.

16. $\lim\limits_{x\to 3}(1+\frac{1}{x})^x$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{tg\,5x}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x+4}{2x^2}$

4.Ответить на контрольные вопросы.

1.Как раскрываются неопределенности разных видов?

2.Запишите первый и второй замечательный пределы.

Практическое занятие №11-12

Вычисление производной сложных функций.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся вычислять производные простейших и сложных функций.

Порядок выполнения.

1. Повторить теоретический материал.

2. Разобрать предложенные примеры.

Пример 1. Найти значение производной данной функции в данной точке:
y=3x+5, x=4.

$y' = 3$ Значит производная равна 3 в любой точке x, в частности , в заданной точке x=4

Пример 2. Найти значение производной данной функции в данной точке:
y=3x^2-2, x=4.

$y' = 6x$ Производная в заданной точке : $y(4)' = 6 \cdot x = 6 \cdot 4 = 24$

Пример 3. Найдите производную функции $y = (2x+3)\sin x$.

$$y' = (2x+3)'\sin x + (2x+3)(\sin x)' = 2\sin x + (2x+3)\cos x = 2\sin x + 2x\cos x + 3\cos x$$

Пример 4. Найдите производную функции: $y = \dfrac{x^2}{5-4x}$.

$$y' = \frac{(x^2)'(5-4x) - x^2(5-4x)'}{(5-4x)^2} = \frac{2x(5-4x) - x^2\cdot(-4)}{(5-4x)^2} = \frac{10x - 8x^2 + 4x^2}{(5-4x)^2} = \frac{10x-4x^2}{(5-4x)^2}$$

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

1. Найдите значение производной данной функции в данной точке:

а) y=x^2 в точке x=-1;

б) $y = \dfrac{1}{x}$ в точке $x = \dfrac{1}{2}$;

в) $y = \sqrt{x+2}$ в точке x=7;

г) y=sin x в точке x=0.

2. Используя формулы дифференцирования, найдите производные функций:

1. $y = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{3}{x^2} - x^4 \cdot \sqrt{x} - 2$;

2. $y = (5x^2 - 2)^6$;

3. $y = \left(1 - 6x^3\right)^5$;

4. $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{4})$;

5. $y = \sqrt{x}\left(3x - 1\right)$;

6. $y = \frac{1 + 3x^2}{1 - 3x}$;

7. $y = \frac{4x + 1}{3 - 2x}$;

8. $y = e^x + e^{-x}$;

9. $y = 4\ e^{5x - 1}$;

10. y = + 5 + x ;

11. y = ;

12. y = ;

13. y = + tgx ;

14. y = sin x + ;

15. $y = \sin(2x - 1)e^{ax}$.

4.Ответить на контрольные вопросы.

1.Как вычислить производную сложной функции?

2.Сформулируйте правила вычисления производных.

3.Как вычисляется производная функции в данной точке?

Практическое занятие №13-14

Интегрирование простейших функций. Вычисление простейших определенных интегралов.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся вычислять определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница, вычислять определенный интеграл методом подстановки и по частям.

Порядок выполнения.

1. **Повторить теоретический материал.**
2. **Разобрать предложенные примеры.**

Пример 1:

$$\int_4^9 \sqrt{x}dx = \int_4^9 x^{\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_4^9 = \left.\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^1}{\frac{3}{2}}\right|_4^9 = \left.\frac{2\sqrt{x} \cdot x}{3}\right|_4^9 = \frac{2}{3}\left(\sqrt{9} \cdot 9 - \sqrt{4} \cdot 4\right) = \frac{2}{3}(3 \cdot 9 - 2 \cdot 4) = \frac{2}{3}(27 - 8) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 19 = \frac{38}{3} = 12\frac{2}{3}$$

Пример 2:

$$\int_1^3 \left(x^3 - 5\right)dx = \left.\frac{x^{3+1}}{3+1} - 5x\right|_1^3 = \left.\frac{x^4}{4} - 5x\right|_1^3 = \left(\frac{3^4}{4} - 5 \cdot 3\right) - \left(\frac{1^4}{4} - 5 \cdot 1\right) =$$

$$= \left(\frac{81}{4} - 15\right) - \left(\frac{1}{4} - 5\right) = \frac{81}{4} - 15 - \frac{1}{4} + 5 = \frac{81-1}{4} - 10 = \frac{80}{4} - 10 = 20 - 10 = 10,$$

Пример 3:

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin^2 3x}dx = -\left.\frac{ctg3x}{3}\right|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} = \left.\frac{ctg3x}{3}\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{12}} = \frac{ctg3 \cdot \frac{\pi}{12}}{3} - \frac{ctg3 \cdot \frac{\pi}{6}}{3} = \frac{ctg\frac{\pi}{4} - ctg\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{1-0}{3} = \frac{1}{3}$$

Пример 4:

$$\int_4^{20}\frac{2}{\sqrt{x+5}}dx = 2\int_4^{20}(x+5)^{-\frac{1}{2}}dx = 2\left.\frac{(x+5)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_4^{20} = 2\left.\frac{(x+5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_4^{20} = 2\left.\frac{2\sqrt{x+5}}{1}\right|_4^{20} = 4\sqrt{x+5}\Big|_4^{20} =$$

$$4\left(\sqrt{4+5}-\sqrt{20+5}\right)=$$

$$= 4\left(\sqrt{9}-\sqrt{25}\right) = 4(3-5) = 4\cdot(-2) = -8$$

Пример 5:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\cos x dx = \left\{\begin{matrix} t=\sin x \\ dt=\cos x dx \\ t_н=\sin 0 = 0 \\ tв=\sin\frac{\pi}{2}=1 \end{matrix}\right\} = \int_0^1 t^2 dt = \left.\frac{t^{2+1}}{2+1}\right|_0^1 = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3} = \frac{1}{3},$$

Пример 6:

$$\int_2^5\frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \left\{\begin{matrix} t=x^2+1 \\ dt=2xdx \Rightarrow xdx=\frac{dt}{2} \\ t_H=2^2+1=5 \\ t_B=5^2+1=26 \end{matrix}\right\} = \int_5^{26}\frac{dt}{2\cdot\sqrt{t}} = \sqrt{t}\Big|_5^{26} = \sqrt{26}-\sqrt{5},$$

Пример 7:

$$\int_0^{-80}\frac{1}{\sqrt[4]{(1-x)^3}}dx = \left\{\begin{matrix} t=1-x \\ dt=-dx \Rightarrow dx=-dt \\ t_H=1-0=1 \\ t_B=1-(-80)=81 \end{matrix}\right\} = \int_1^{81}\frac{-dt}{\sqrt[4]{t^3}} = \int_1^{81}-t^{-\frac{3}{4}}dt = -\left.\frac{t^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1}\right|_1^{81} = -\left.\frac{t^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}}\right|_1^{81} = -\left.\frac{4\sqrt[4]{t}}{1}\right|_1^{81} =$$

$$-4\sqrt[4]{81}-\left(-\sqrt[4]{1}\right) = -4\cdot 3+1 = -12+1 = -11$$

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

Вычислить интегралы:

1	$\int_1^8 \sqrt[3]{x^2}\cdot dx$	10	$\int_8^{27}(\sqrt[3]{x})^{-1}\cdot dx$	19	$\int_1^4(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})\cdot dx$	28	$\int_1^9\frac{x-1}{\sqrt{x}}\cdot dx$
2	$\int_1^3 e^{2x}\cdot dx$	11	$\int_0^1 e^{3x}\cdot dx$	20	$\int_1^3 0{,}5\cdot e^{4x}\cdot dx$	29	$\int_2^3 4\cdot e^{4x}\cdot dx$
3	$\int_0^1\frac{dx}{x+2}$	12	$\int_2^3\frac{dx}{x-1}$	21	$\int_0^3\frac{dx}{2x+1}$	30	$\int_1^2\frac{dx}{x+3}$
4	$\int_0^{\pi/4}\cos 2x\cdot dx$	13	$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin 4x\cdot dx$	22	$\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cdot dx$	31	$\int_{0{,}5}^1\sin\frac{x}{3}\cdot dx$
5	$\int_0^1\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}$	14	$\int_{1{,}5}^3\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{3}}$	23	$\int_{0{,}5}^{\sqrt{3}/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	32	$\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
6	$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$	15	$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$	24	$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{9+x^2}$	33	$\int_5^{5\sqrt{3}}\frac{dx}{25+x^2}$
7		1		2		3	

	$\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+1}}$	6	$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{32xdx}{(x^2+1)^5}$	5	$\int_{0}^{\pi/3} \frac{\sin xdx}{3-\cos x}$	4	$\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{2+\sin x}$
8	$\int_{0}^{1} \arcsin x \cdot dx$	17	$\int_{0}^{\pi/2} x \cdot \cos x \cdot dx$	26	$\int_{1}^{2} x \cdot \sin x \cdot dx$	35	$\int_{2}^{3} x \cdot \ln x \cdot dx$
9	$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin 7x \cdot \cos 3x \cdot dx$	18	$\int_{2}^{3} \frac{(2x-1)dx}{x^2-4x+5}$	27	$\int_{0}^{\pi/2} \sin^3 x \cdot \cos^4 x \cdot dx$	36	$\int_{-5}^{-1} \frac{dx}{x^2+6x+13}$

4.Ответить на контрольные вопросы.

1.Что называется определенным интегралом?

2. Перечислить свойства определенного интеграла.

3. Как вычислить определенный интеграл методом подстановки?

Практическое занятие №15-16

Решение прикладных задач.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся решать прикладные задачи, используя свойства определенного интеграла.

Порядок выполнения.

1. Повторить теоретический материал.

2. Разобрать предложенные примеры.

Пример 1. Найти работу, необходимую для выкачивания воды из бассейна, имеющего форму полуцилиндра, длина которого *а* = 25 *м*, а радиус R = 20 *м*.

Решение. Примем за x высоту, на которую надо поднять воду, чтобы выкачать ее из бассейна. Разобьем объем бассейна на слои, параллельные поверхности воды, толщина которых *dx*, длина *а*, ширина 2. Назовем их элементарными слоями.

Объем элементарного слоя, находящегося на глубине x, dV = 2 *a.*

Для подъема этого слоя воды на высоту x необходимо выполнить элементарную работу dA = gxdV = g *ax, где* – плотность воды.

Значит, вся работа по выкачиванию воды из бассейна

A = *a*g . = – *a*g | = = g*a* = g25 g.

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука: F = kx, где F – сила, Н; x – абсолютное удлинение пружины, м, вызванное силой F; k – коэффициент пропорциональности, Н/м.

Пример 2. Вычислить работу силы F при сжатии винтовой пружины на 0,04м, если для сжатия ее на 0,01м нужна сила 10 Н.

Решение. Так как x = 0,01м при F = 10 Н, то по закону Гука 10 = k0,01, откуда k = 1000 Н/м. Значит F = 1000 k, т.е. *f*(*x*) = 1000 x. Искомую работу найдем по формуле

A = , полагая *a* = 0*, b* = 0,04;

A = = 500| = 0,8 Дж.

Если точка движется по некоторой линии и ее скорость $= f(t)$ есть данная функция времени t, то путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_1;\ t_2]$, S = .

Пример 3. Найти путь, пройденный материальной точкой за 10 секунд от начала движения со скоростью   = 0,1 *м/с.*
Решение. S =   = 0,1 | = 0,1   – 0 = 250м.

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

1. Скорость движения точки по закону $v = (3t^2 + 2t + 1)$ м/с.
   Найти путь, пройденный точкой эа 10 секунд от начала движения.
2. Скорость движения точки $v = (9t^2 – 8t)$ м/с.
   Найти путь, пройденной точкой за четвертую секунду.
3. Скорость движения точки $v = (12t – 3t^2)$ м/с.
   Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.
4. Вычислить работу, необходимую для выкачивания воды из полусферического сосуда, диаметр которого 20м.
5. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.
6. При сжатии пружины на 0,05 м затрачивается работа 25 Дж.
   Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,1м?
7. Для растяжения пружины на 0,04 м необходимо совершить работу 20 Дж.
   На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу 80 Дж?

4.Ответить на контрольные вопросы.

1.Как вычисляется определенный интеграл?

2.Как находить путь, если известен закон, по которому меняется скорость?

Тема 3.2 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Практическое занятие №17
Решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся решать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Порядок выполнения.

1. **Повторить теоретический материал.**
2. **Разобрать предложенные примеры.**

Пример 1. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию y(0)=0

Решение: Разделим переменные x и y

$$y^2dy = \frac{e^x}{(1+e^{2x})}dx$$

Проинтегрируем обе части

$$\int y^2dy = \int \frac{e^x}{(1+e^{2x})}dx$$

$$\frac{y^3}{3} = arctg \quad e^x + C$$

$$y^3 = 3arctg \quad e^x + 3C$$

- Общее решение дифференциального уравнения

Из условия y(0)=0

0=3arctg e^0 +3C

0=3arctg 1 +3C

$$0 = 3\frac{\pi}{4} + 3C$$

$$-3C = 3\frac{\pi}{4}$$

$$C = -\frac{\pi}{4}$$

$$y^3 = 3arctg \quad e^x + 3\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y^3 = 3arctg \quad e^x - \frac{3\pi}{4}$$

- Частное решение дифференциального уравнения

Пример 2: Найдите общее решение дифференциального уравнения $x + yy' = 0$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию y(0)=2

Решение: $y' = \frac{dy}{dx}$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$y \cdot dy = -x \cdot dx$$

$$\int y \cdot dy = \int -x \cdot dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C}{2}$$

$$x^2 + y^2 = C - общее \quad решение \quad диф.уравнения$$

$$y(0) = 2$$

$$2^2 + 0^2 = C$$

$$C = 4$$

$$x^2 + y^2 = 4 - частное \quad решение \quad диф.уравнения$$

Пример 3. Найдите общие решения уравнения y’ = (1 + x^2)(1 + y^2) и его частные решения, удовлетворяющие условию y(0) = 1.

$\frac{y'}{1+y^2} = 1 + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{1+y^2} = (1+x^2)dx \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dy}{1+y^2} = \int (1+x^2)dx \quad \Leftrightarrow$ arctgy + C_1 = $x + \frac{1}{3}x^3 + C_2 \Leftrightarrow$ arctgy = $x + \frac{1}{3}x^3 + C \Rightarrow$ **y = tg**$\left(x + \frac{1}{3}x^3 + C\right)$

y(0) = 1, тогда tgC = 1, то есть, $C = \frac{\pi}{4}$. Частное решение: $\mathbf{y} = \mathbf{tg}\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{\pi}{4}\right)$.

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

Задание 1

Найдите частное решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию:

1. $y' - \frac{y}{x} = 0$, $y(1) = 0$
2. $y' - y\operatorname{ctg} x = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
3. $y' = \frac{1}{2}\sin 2x$, $y(0) = 0$
4. $y' + y\operatorname{tg} x = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
5. $y' + \frac{y}{x+2} = 0$, $y(-1) = \frac{3}{2}$
6. $y' - \frac{y}{x} = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
7. $y' - \frac{y}{x+1} = 0$, $y(0) = 1$
8. $y' = \sin x$, $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$
9. $y' + \frac{y}{2x} = 0$, $y(1) = 1$
10. $y' + \frac{2x}{1+x^2}\cdot y = 0$, $y(0) = \frac{2}{3}$
11. $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 0$, $y(2) = 4$
12. $y' = \frac{x+1}{y}$, $y(1) = e$
13. $y' = 2\frac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$
14. $y' = -\frac{8y}{x^2}$, $y(1) = 4$
15. $y' + \frac{2}{x}y = x^3$, $y(1) = -\frac{5}{6}$

4.Ответить на контрольные вопросы.

1.Что значит разделить переменные?

2.Какие существуют решения дифференциальных уравнений?

3.Что значит найти решение дифференциального уравнения в неявном виде?

Практическое занятие №18
Решение однородных дифференциальных уравнений первого порядка.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся решать однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Порядок выполнения.

1. **Повторить теоретический материал.**
2. **Разобрать предложенные примеры.**

Пример 1. Установить, являются ли однородными функции

1) $f(x,\ y)=x^2y-3xy^2+y^3$;

2) $\varphi(x,\ y)=x^4-y^4$;

Решение. Находим

$$f(tx,\ ty)=(tx)^2\bullet ty-3tx(ty)^2+(ty)^3=$$
$$=t^3\left(x^2y-3xy^2+y^3\right)=$$
$$=t^3f(x,\ y).$$

Следовательно, $f(x,\ y)$ - однородная функция третьей степени.

Аналогично устанавливается, что $\varphi(x,\ y)$ - однородная функция четвёртой степени:

$$\varphi(tx,\ ty)=(tx)^4-(ty)^4=$$
$$=t^4\left(x^4-y^4\right)=$$
$$=t^4\varphi(x,\ y).$$

Отношение двух однородных функций одинаковых степеней также есть однородная функция, но нулевой степени. Пусть $f(x,\ y)$ и $\varphi(x,\ y)$ - однородные функции *k*-й степени. Это означает, что $f(tx,\ ty)=t^kf(x,\ y)$, а $\varphi(tx,\ ty)=t^k\varphi(x,\ y)$. Их отношение - некоторая функция $\psi(x,\ y)=\dfrac{f(x,\ y)}{\varphi(x,\ y)}$, так как $\dfrac{t^k}{t^k}=1$.

Решение однородного дифференциального уравнения первого порядка сводится к решению дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Для этого преобразуем уравнение к виду

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,\ y)}{N(x,\ y)} \text{ или } \frac{dy}{dx} = f(x,\ y), \quad (1)$$

где $f(x,\ y) = -\frac{M(x,\ y)}{N(x,\ y)}$ - однородная функция нулевой степени как отношение однородных функций одинаковых степеней. Это равенство справедливо при любом *t*. В частности, если $t = \frac{1}{x}$, то $f\left(\frac{x}{x},\ \frac{y}{x}\right) = f(x,\ y)$, или $f(x,\ y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$, т. е. функция $f(x,\ y)$ представлена в виде функции от $\frac{y}{x}$.

Обозначим это отношение через *z*, т. е. $z = \frac{y}{x}$, откуда $y = zx$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = z'x + zx' = z'x + z$$

и уравнение (1) преобразуется так:

$$z'x + z = F(z); \quad \frac{dz}{dx} \bullet x = F(z) - z;$$

$$x\, dz = \left[F(z) - z\right]dx.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные и выполнив почленное интегрирование, затем следует заменить *z* на $\frac{y}{x}$.

Пример 2. Решить однородное дифференциальное уравнение

$$\left(xy + y^2\right)dx - x^2dy = 0$$

Решение. Сначала преобразуем данное уравнение к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{x^2},$$

а затем произведём подстановку $y = zx$, откуда $y' = z'x + z$. Тогда уравнение примет вид

$$z'x + z = \frac{xzx + (zx)^2}{x^2}, \text{ или } x\frac{dz}{dx} = z^2, \text{ или } \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}.$$

Почленное интегрирование даёт

$-\frac{1}{z}=\ln|x|+\ln|C|$, или $\ln|Cx|=-\frac{1}{z}$.

Заменяя *z* на $\frac{y}{x}$, получим $\ln|Cx|=-\frac{x}{y}$, откуда $y=-\frac{x}{\ln|Cx|}$.

Пример 3. Решить однородное дифференциальное уравнение

$$\left(y+\sqrt{xy}\right)dx=xdy$$

Решение. Сначала преобразуем данное уравнение к виду

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+\sqrt{xy}}{x},$$

а затем произведём подстановку $y=zx$, откуда $y'=z'x+z$. Тогда уравнение примет вид

$$z'x+z=\frac{zx+\sqrt{xzx}}{x}.$$

Путём дальнейших преобразований получаем

$$\frac{zx+\sqrt{xzx}}{x}=\frac{x\left(z+\sqrt{z}\right)}{x}=z+\sqrt{z}.$$

Итак, $z'x+z=z+\sqrt{z}$ или $z'x=\sqrt{z}$.

Далее $\frac{dx}{dx}x=\sqrt{z}$ или $\frac{dz}{\sqrt{z}}=\frac{dx}{x}$.

Почленное интегрирование даёт

$$2\sqrt{z}=\ln|x|+\ln|C|.$$

Заменяя *z* на $\frac{y}{x}$, получим $2\sqrt{\frac{y}{x}}=\ln|Cx|$, откуда $2\sqrt{\frac{y}{x}}\bullet x=x\ln|Cx|$ и
$x\ln|Cx|=2\sqrt{xy}$ - общий интеграл данного уравнения.

Пример 4. Решить однородное дифференциальное уравнение

$$xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$$

Решение. Поделим почленно уравнение на *dx* и получим

$x\frac{dy}{dx}-y=\sqrt{x^2+y^2}$ или

$$x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}.$$

Произведём подстановку $y=zx$, откуда $y'=z'x+z$. Тогда уравнение примет вид

$$x\left(z'x+z\right)=zx+\sqrt{x^2+z^2x^2}.$$

Путём дальнейших преобразований получаем

$$x\left(z'x+z\right)=x\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$$

$$z'x+z=z+\sqrt{1+z^2}$$

$$z'x=\sqrt{1+z^2}$$

Итак, $\frac{dx}{dx}x=\sqrt{1+z^2}$ или

$$\frac{dx}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{dx}{x}.$$

Почленное интегрирование даёт

$$\ln\left|z+\sqrt{z^2+1}\right|=\ln|x|+\ln|C|,$$

откуда $z+\sqrt{z^2+1}=Cx$.

Заменяя z на $\frac{y}{x}$, получим $\frac{y}{x}=\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}=Cx$

Чтобы избавиться от дробности, умножим обе части выражения на x и получим

$$Cx^2=y+\sqrt{x^2+y^2}$$

- общий интеграл данного уравнения.

Пример 5. Решить однородное дифференциальное уравнение

$$xy^2dy=\left(x^3+y^3\right)dx$$

Решение. Поделим почленно уравнение на dx и получим

$$xy^2\frac{dy}{dx}=x^3+y^3$$ или

$$y'=\frac{x^3+y^3}{xy^2}.$$

Произведём подстановку $y=zx$, откуда $y'=z'x+z$. Тогда уравнение примет вид

$$z'x+z=\frac{x^3+z^3x^3}{xz^2x^2}.$$

Путём дальнейших преобразований получаем

$$z'x+z=\frac{1+z^3}{z^2}$$

$$z'x=\frac{1+z^3}{z^2}-\frac{z^3}{z^2}$$

$$z'x=\frac{1}{z^2}.$$

Итак, $\frac{dz}{dx}x=\frac{1}{z^2}$ или

$$z^2dz=\frac{dx}{x}.$$

Почленное интегрирование даёт

$$\frac{z^3}{3}=\ln|x|+\ln|C|.$$

Заменяя z на $\frac{y}{x}$, получим $\frac{y^3}{3x^3}=\ln|Cx|$

Чтобы избавиться от дробности, умножим обе части выражения на x в кубе и получим

$$y^3=3x^3\ln|Cx|$$

- общий интеграл данного уравнения.

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

4.Ответить на контрольные вопросы.

1.Какое уравнение называют однородным?

2.Сформулируйте алгоритм решения однородного дифференциального уравнения первого порядка.

Практическое занятие №19-20

Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся находить общие и частные решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Порядок выполнения.

1. Повторить теоретический материал.

2. Разобрать предложенные примеры.

Пример. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y' - \frac{2xy}{x^2-5} = (x^2-5)\sin x$$

с начальным условием y(0)=0.

Решение. Это линейное неоднородное уравнение, где

$$p(x) = -\frac{2x}{x^2-5},\ f(x) = (x^2-5)\sin x.$$

1) Ищем решение уравнения в виде

$$y = U(x)V(x)$$

$$y' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x),$$

2) Подставляя значения y и y' в данное уравнение, придем к

$$U'V + UV' - \frac{2x}{x^2-5}UV = (x^2-5)\sin x.$$

Выносим во втором и третьем слагаемом U за скобки:

$$U'V + U(V' - \frac{2x}{x^2-5}V) = (x^2-5)\sin x. \quad (7)$$

3) Выберем V так, чтобы выражение в скобках при U обратилось в ноль:

$$V' - \frac{2x}{x^2-5}V = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, решим его. Имеем

$$\frac{dV}{dx} - \frac{2x}{x^2-5}V = 0,$$

или, разделяя переменные, получим

$$\frac{dV}{V} - \frac{2x}{x^2-5}dx = 0.$$

Интегрируем:

$$\int\frac{dV}{V} - \int\frac{2x}{x^2-5}dx = c;$$

$$\ln|V| - \ln|x^2-5| = c.$$

Так как нас интересует ненулевое *частное решение* этого уравнения, положим *c=0*; тогда

$$\ln|V| = \ln|x^2-5|,$$

$$V = x^2-5.$$

4) Теперь уравнение ($*$) примет вид уравнения с разделяющимися переменными

$$U'(x^2-5)=(x^2-5)\sin x,$$

или

$$dU=\sin xdx;$$

интегрируем

$$\int dU=\int \sin xdx,$$

$$U=-\cos x+c.$$

5) Найдем искомую функцию y, помня, что $y=U(x)V(x)$.

Таким образом,

$$y=(-\cos x+c)(x^2-5)- \qquad (8)$$

общее решение.

6) Используя начальное условие y(0)=0, получаем

(-cos0+c)(-5)=0,

находим c=1 и подставляем в общее решение (8).

Ответ. y=(1-cosx)(x^2-5).

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

1.Найдите общее и частное решение дифференциальных уравнений:

1.$y'+y=e^x$, $y(0)=1$; 2.$xy'-3y=4x^3$, $y(1)=0$;

3.$y'+\frac{y}{x}=\frac{2}{1+x^2}$; $y(1)=\ln 2$; 4.$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$, $y(1)=8$;

5^*.$y'\cos^2 x+y=tgx$, $y(0)=0$.

2.Найдите решения задач Коши для данных уравнений:

1.$xy'+y-e^x=0$, $y(1)=0$; 2.$y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^2$, $y(1)=4$;

3.$y'-ytgx=\frac{1}{\cos x}$, $y(0)=0$; 4.$y'-2xy=3x^2-2x^4$, $y(0)=0$;

5.$y'-\frac{2xy}{x^2+3}=(x^2+3)\cos x$, $y(0)=3$.

4.Ответить на контрольные вопросы.

1. Назовите известные вам типы дифференциальных уравнений.
2. Каков общий вид линейного дифференциального уравнения первого порядка?
3. С помощью какой подстановки решается линейное дифференциальное уравнение первого порядка и к какому уравнению сводится его решение?

Практическое занятие №21
Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся находить общие решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Порядок выполнения.

1. Повторить теоретический материал.

2. Разобрать предложенные примеры.

Пример 1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

Решение.

1. Составим характеристическое уравнение

$$k^2 + 6k + 13 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$k_1 = -3 + 2i,$$

$$k_2 = -3 - 2i.$$

2. Так как k_1 и k_2 - комплексно – сопряженные корни, тогда ФСР имеет вид { $e^{-3x}\cos 2x, e^{-3x}\sin 2x$ } и общее решение запишется так

$$y_{o.o.} = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x. \qquad (4)$$

Решение. По теореме (1)

$$y_{о.н.} = y_{о.о} + y_{ч.н.}. \qquad (*)$$

1. Найдем общее решение ($y_{o.o}$) соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 4y = 0. \qquad (5)$$

Составим характеристическое уравнение

$$k^2 - 4 = 0.$$

Оно имеет два различных действительных корня

$$k_1 = 2,$$

$$k_2 = -2.$$

Следовательно,

ФСР: $\{e^{2x}, e^{-2x}\}$

и общее решение уравнения (5) запишется так

$$y_{о.о.} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

2. Ищем какое – либо частное решение ($y_{ч.н.}$) неоднородного уравнения (4), применяя *метод подбора частных решений*.

Здесь правая часть уравнения (4) имеет вид (III) с $\alpha = 2, \beta = 2, n = 0,\ m = 0.$

Так как $2 \pm 2i$ - не корни характеристического уравнения и $\max(n,m) = 0$, то частное решение будем искать в виде (III.a)):

$$y_{ч.н} = e^{2x}(A\cos 2x + B\sin 2x), \qquad (6)$$

где A, B – неопределенные коэффициенты (неизвестные числа).

3. Находим неопределенные коэффициенты. Дважды продифференцируем $y_{ч.н}$ и подставим в исходное уравнение (4). Имеем

$$e^{2x}[(8B-4A)\cos 2x + (-8A-4B)\sin 2x] = e^{2x}\sin 2x \Big| \cdot \frac{1}{e^{2x}},$$

$$(8B-4A)\cos 2x + (-8A-4B)\sin 2x = \sin 2x.$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos 2x, \sin 2x$ в обеих частях равенства, получим

$$\begin{cases} 8B - 4A = 0, \\ -8A - 4B = 1, \end{cases} -$$

систему из двух уравнений с двумя неизвестными A и B, из которой определяем

$$A = -\tfrac{1}{10}, B = -\tfrac{1}{20}.$$

Таким образом, по формуле (6)

$$y_{ч.н} = e^{2x}\left(-\tfrac{1}{10}\cos 2x - \tfrac{1}{20}\sin 2x\right).$$

4. Находим общее решение по формуле ($*$)

$$y_{о.н.} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \tfrac{e^{2x}}{20}(\sin 2x + 2\cos 2x).$$

Ответ: $y_{о.н.} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \tfrac{e^{2x}}{20}(\sin 2x + 2\cos 2x).$

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

Найдите общие решения дифференциальных уравнений:

1.$y'' + y = \cos x$; 2.$y'' + y = x\sin x$;

3.$y'' - 2y' + y = e^{2x}$; 4.$y'' - 4y = 8x^3$;

5.$y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$.

6.$y'' - 3y' + 2y = e^{x}$; 7.$y'' + 3y' = 9x$;

8.$y'' + 4y' = \sin x$; 9.$y'' - 9y = e^{3x}\cos x$;

10.$y'' + y' - 2y = 6x^2$.

4.Ответить на контрольные вопросы.

1. Как определяется и записывается в общем виде линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами?
2. Что такое характеристическое уравнение?
3. Какой вид имеет общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если корни характеристического уравнения:

а) действительные и различные ($k_2 \neq k_1$);
б) действительные и равные ($k_2 = k_1 = k$);
в) комплексно – сопряженные ($k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$)?

Практическое занятие №22-23
Решение линейных однородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся решать линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Порядок выполнения.

1. Повторить теоретический материал.

2. Разобрать предложенные примеры.

Пример. Найти общее решение и частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' - 5y = 0$.

Решение: Решим характеристическое уравнение

$k^2 + 4k - 5 = 0$

$D = 16 + 20 = 36 = 6^2$

$k_1 = \dfrac{-4+6}{2} = 1$

$k_2 = \dfrac{-4-6}{2} = -5$

k1≠k2

Общее решение - $y = C_1e^{1x} + C_2e^{-5x}$

Частные решения - $y_1 = C_1e^{1x}$ и $y_2 = C_2e^{-5x}$

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

Найдите общие и частные решения дифференциальных уравнений второго порядка:

1. y″-y′-2y=0
2. y″-4y=0
3. y″+4y=0
4. y″+4y′=0
5. y″x+3y′-4x=0
6. y″-2y′+y=0
7. y″+6y′+9y=0
8. y″+6y′+13y=0
9. y″-2ay′+a2y=0
10. 3y″+23y′-8y=0

4.Ответить на контрольные вопросы.

1.Какое уравнение называют линейным однородным уравнением второго порядка?

2.Как составить характеристическое уравнение?

3.Какой вид имеет общее решение линейное дифференциальное уравнение второго порядка?

Практическое занятие №24

Решение линейных неоднородных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся решать неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Порядок выполнения.

1. Повторить теоретический материал.

2. Разобрать предложенные примеры.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения. $y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x}$ Сделать проверку.

Решение а) Найдем y_{oo} – общее решение соответствующего однородного уравнения, т.е. уравнения

$y'' - 3y' - 4y = 0$.

$k^2 - 3k - 4 = 0$

$k_1 = -1$, $k_2 = 4$.

$y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{4x}$

$y_{oo} = C_1e^{-x} + C_2e^{4x}$.

б) $y = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{4x}$.

Функции $C_1(x), C_2(x)$ могут быть найдены из решения системы

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x), \end{cases}$$

где $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{4x}$, $y_1' = -e^{-x}$, $y_2 = 4e^{4x}$, $f(x) = 6xe^{-x}$, т.е.

$$\begin{cases} C_1'e^{-x} + C_2'e^{4x} = 0, \\ -C_1'e^{-x} + 4C_2'e^{4x} = 6xe^{-x}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'e^{-x} = -C_2'e^{4x}, \\ C_2'e^{4x} + 4C_2'e^{4x} = 6xe^{-x}, \end{cases} \begin{cases} C_1'e^{-x} = -C_2'e^{4x}, \\ 5C_2'e^{4x} = 6xe^{-x}, \end{cases} \begin{cases} C_1'e^{-x} = -C_2'e^{4x}, \\ C_2' = \dfrac{6x}{5}e^{-5x}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'e^{-x} = -\dfrac{6x}{5}e^{-5x}e^{4x}, \\ C_2' = \dfrac{6x}{5}e^{-5x}, \end{cases} \begin{cases} C_1' = -\dfrac{6x}{5}, \\ C_2' = \dfrac{6x}{5}e^{-5x}. \end{cases}$$

$$C_1' = -\frac{6x}{5}, \int C_1'dx = -\int \frac{6x}{5}dx, \quad C_1(x) = -\frac{3}{5}x^2 + A.$$

$$C_2' = \frac{6x}{5}e^{-5x}, \int C_2'dx = \int \frac{6x}{5}e^{-5x}dx.$$

$$\int \frac{6x}{5}e^{-5x}dx = \begin{bmatrix} \text{по частям} & \\ u = x & dv = e^{-5x}dx \\ du = dx & v = \int dv = \int e^{-5x}dx = -\frac{1}{5}e^{-5x} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{6}{5}\left(-\frac{1}{5}xe^{-5x} - \int -\frac{1}{5}e^{-5x}dx\right) = -\frac{6}{25}\left(xe^{-5x} - \left(-\frac{1}{5}\right)e^{-5x}\right) + B =$$

$$= -\frac{6}{25}xe^{-5x} - \frac{6}{125}e^{-5x} + B. \qquad C_2(x) = -\frac{6}{25}xe^{-5x} - \frac{6}{125}e^{-5x} + B.$$

Таким образом,

$$C_1(x) = -\frac{3}{5}x^2 + A, \quad C_2(x) = -\frac{6}{25}xe^{-5x} - \frac{6}{125}e^{-5x} + B.$$

Тогда

$$y = \left(-\frac{3}{5}x^2 + A\right)e^{-x} + \left(-\frac{6}{25}xe^{-5x} - \frac{6}{125}e^{-5x} + B\right)e^{4x} =$$

$$= -\frac{3}{5}x^2e^{-x} + Ae^{-x} - \frac{6}{25}xe^{-5x}e^{4x} - \frac{6}{125}e^{-5x}e^{4x} + Be^{4x} =$$

$$= -\frac{3}{5}x^2e^{-x} + Ae^{-x} - \frac{6}{25}xe^{-x} - \frac{6}{125}e^{-x} + Be^{4x} =$$

$$= \left(A - \frac{6}{125}\right)e^{-x} + Be^{4x} - \frac{3}{25}e^{-x}\left(5x^2 - 2x\right)$$

Обозначив через $C_1 = A - \frac{6}{125}, \; C_2 = B$, окончательно получим

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} - \frac{3}{25}\left(5x^2 + 2x\right)e^{-x}.$$

Ответ: общее решение $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} - \frac{3}{25}\left(5x^2 + 2x\right)e^{-x}.$

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

Найдите общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения. Сделайте проверку.

1. $y'' + y' - 6y = 4xe^{-x}$
2. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 5x$

4.Ответить на контрольные вопросы.

1.Что называют общим интегралом?

2.Какой вид имеет решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка?

Тема 4.1 «Основы теории вероятностей и математической статистики»

Практическое занятие №25

Теорема сложения вероятностей для совместных событий.

Цель: Разобрать теорему сложения вероятностей для совместных событий.

Порядок выполнения.

1. Повторить теоретический материал.

2. Разобрать предложенные примеры.

Пример 1.

В партии из 50 изделий содержится пять бракованных. Какова вероятность того, что из выбранных наудачу 30 изделий не более одного бракованного?

Решение. Пусть *А* — событие, состоящее в том, что 30 изделий выборки — качественные, *В* — в рассматриваемой выборке из 30 изделий только одно бракованное, С— не более одного бракованного. Тогда, очевидно, $C = A + B$. Так как события *А* и *В*несовместны, то по формуле (1) имеем

$P(C) = P(A) + P(B)$.

Найдем вероятности событий *А* и *В:*

Р(А)= ≈ 0,007 Р(В)= ≈0,065

Отсюда Р(С)≈ 0,072

Пример 2.

Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность бесперебойной работы первого станка в течение некоторого времени *t* равна $p_1= 0{,}9$, второго — $p_2= 0{,}8$. Какова вероятность бесперебойной работы обоих станков в течение указанного промежутка времени?

Решение. Рассмотрим следующие события: A_1 и A_2— бесперебойная работа соответственно первого и второго станков в течение времени *t; А* — бесперебойная работа обоих станков в течение указанного времени. Тогда событие *А* есть совмещение событий

A*1*и A2, т. е. $A = A1 \cdot A2$. Так как события *At* и A2 независимы (станки работают независимо друг от друга), то по формуле (3) получим

$P(A) = P(A1) \cdot P(A2) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72$.

Пример 3.

В примере 3 определить вероятность бесперебойной работы хотя бы одного из двух станков в течение времени *t*(событие *B)*.

Решение. Первый способ. Рассмотрим противоположное событие *B,* означающее простой обоих станков в течение времени /. Очевидно, что событие *B* есть совмещение событий *A1* и A2 простоев первого и второго станков, т. е. $B = \bar{A}1 \cdot \bar{A}2$. Так как события$\bar{A}1$ и $\bar{A}2$? независимы, то

$P(B) = P(\bar{A}1) . P(\bar{A}2) = (1 - P(A1)) \cdot (1 - P(A2)) = = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$.

Отсюда

$P\{B) = 1 — P(B) = 0{,}98$.

Второй способ. Событие *B* происходит в том случае, когда имеет место одно из следующих трех несовместных событий: либо $A1 \cdot \bar{A}2$—совмещение событий *A1* 4 и $\bar{A}2$ (первый станок работает, второй — не работает), либо $\bar{A}1 \cdot A2$— совмещение событий $\bar{A}1$ и A2 (первый станок не работает, второй — работает), либо *A1A2*— совмещение событий *A1* и Л2 (оба станка работают), т. е.

$B = A1\,\bar{A}2 + \bar{A}1A2 + A1A2$.

По формуле (1) получим

$P(B) = P(A1\,\bar{A}2) + P(\bar{A}1A2) + P(A1A2)$.

В силу того, что события *A1* и A2, а следовательно, $\bar{A}1$ и $\bar{A}2$, независимы, имеем

$P(B)=P(A1) \cdot P(\bar{A}2)+P(\bar{A}1).P(A2) + P(A1) \cdot P(A2) = = P(A1)[1-P(A2)]+[1-P(A1)]P(A2) + P(A1).P(A2)=0{,}98$.

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

1.В ящике в случайном порядке лежат 10 деталей, из которых 4 стандартных. Контролер взял наудачу 3 детали. Найдите вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей оказалась стандартной.

2.Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо трем, либо пяти, либо тому и другому одновременно.

3. В одной урне находятся 4 белых и 8 черных шаров, в другой 3 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

4. В коробке находится 12 пробирок, из которых 8 стандартных. Лаборант берет наудачу одну за другой две пробирки. Найти вероятность того, что обе пробирки окажутся стандартными.

5. В аптеку поступает одна и та же продукция от трех производителей и в разном количестве: от первого 20 упаковок, от второго 10 упаковок, от третьего 70 упаковок. Вероятности некачественного изготовления продукции на предприятиях соответственно равны: 0,02; 0,03; 0,05. Определить вероятность получения некачественной продукции.

6. Имеются три партии деталей по 30 штук в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 30, 25, 20. Из произвольно выбранной партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Найдите вероятность того, что деталь была извлечена из третьей партии.

7. На двух автоматах производятся одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата втрое больше производительности второго. Первый автомат в среднем производит 80% деталей 1 сорта, а второй 90%. Взятая наудачу деталь оказалась 1сорта. Найдите вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

8. Всхожесть семян оценивается вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдет три?

9. Предприятие изготовило и отправило заказчику 100000 бутылок сока. Вероятность того, что бутылка может оказаться битой, равна 0,0001. Найти вероятность того, что в отправленной партии будет пять битых бутылок.

4.Ответить на контрольные вопросы.

1. Что понимают под суммой и произведением событий?
2. Сформулируйте теорему сложения вероятностей несовместных событий.
3. Сформулируйте теорему сложения вероятностей совместных событий.

Практическое занятие №26
Формула полной вероятности.

Цель: Содействовать развитию навыков решать задачи на вычисление сложных событий, развивать логическое и творческое мышления студентов, самостоятельную деятельность, вычислительные навыки.

Порядок выполнения.

1. Повторить теоретический материал.
2. Разобрать предложенные примеры.

Пример.

Имеется три урны с шарами. В первой урне 4 белых и 5 черных, во второй — 5 белых и 4 черных, в третьей — 6 белых шаров. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что: а) этот шар окажется белым; б) белый шар вынут из второй урны.

Решение, а) Пусть A — событие, означающее, что извлечен белый шар. Рассмотрим три гипотезы:

Н*1*— выбрана первая урна; Н2— выбрана вторая урна ; Нз— третья. Так как урна, из которой извлекают шар, выбирается наугад, то

$P(H1) = P(H2) = P(H_3) = ⅓$

Условные вероятности события *A* соответственно равны:

P(A/H1) = 4/9 (вероятность извлечения белого шара из первой урны),

P(A/H2) = 5/9 (вероятность извлечения белого шара из второй урны),

P(A/H3) = 1 (вероятность извлечения белого шара из третьей урны).

а) Отсюда по формуле полной вероятности получим

$P(A)=1/3\times4/9 + 1/3\times5/9 + 1/3\times1 = 2/3$

б) Для определения вероятности того, что белый шар извлечен из второй урны,

воспользуемся формулой Байеса:

$$P\{H2 /A) = \frac{P(H2)P(A/H2)}{P(A)} = \frac{1/3\times5/9}{2/3}$$

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

1.В пирамиде 10 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,85; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

2. В первой коробке содержится 25 радиоламп, из них 20 стандартных; во второй коробке – 15 ламп, из них 11 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная, равна 0,85, а второго – 0,95. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого набора) – стандартная.

4. Набирая номер телефона, абонент забыл 2 цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набранные цифры правильные.

5. Из 50деталей 18 изготовлены в первом цехе, 20 – во втором, остальные в третьем. Первый и третий цеха дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,95, второй цех – с вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества?

4.Ответить на контрольные вопросы.

1. Сформулируйте теорему умножения событий.
2. Сформулируйте теорему сложения событий.
3. Формула условной вероятности.
4. Формула полной вероятности.

Тема 5.1 «Множества и операции над ними»

Практическое занятие №27

Операции над множествами.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся выполнять различные операции над множествами.

Порядок выполнения.

1. Повторить теоретический материал.

2. Разобрать предложенные примеры.

Пример 1. Если N – множество натуральных чисел, то 2 , 10 N, но   - 5 N.

Пример 2. Пусть А – множество всех стран Европы, тогда Англия А, в то время как Индия А.

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

1. Запишите множество А, элементы которого суть делители числа 24.
2. Найдите множество целых корней уравнения $9x^2 - 1 = 0$.
3. Найдите пересечение множеств А = {0, 1, 2,3}, В = { -1,2, 3, 4, 5, 6}.
4. Пусть X – это множество государственных предприятий с годовым оборотом *b* не ниже а. Пусть Y – это множество предприятий с годовым оборотом b не выше с. (Пусть, а с). Определить пересечение множеств X Y.
5. Найдите разность множеств А = { 2n – 1, n   N} и В = {4m + 1, m N}.
6. Даны множества A_1 = {*a, b,* c}; A_2 = {c, d, e*, f};* U = { *a, b*, c, d, e*,f* }. Осуществите над множествами операции а)объединения, б)пересечения, в)разности, г)дополнения.

4.Ответить на контрольные вопросы.

1.Что называют множеством?

2.Что называют объединением множеств?

3.Что называют пересечением множеств?

4.Что называют разностью множеств?

5.Что называют дополнением множества?

Практическое занятие №28

Основные тождества алгебры множеств.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся выполнять операции объединения множеств; выработать умение находить объединение множеств, заданных различными способами, пользоваться свойствами операций пересечения и объединения.

Порядок выполнения.

1. Повторить теоретический материал.

2. Разобрать предложенные примеры.

Пример.

Доказать следующее тождество [redacted].

Решение.

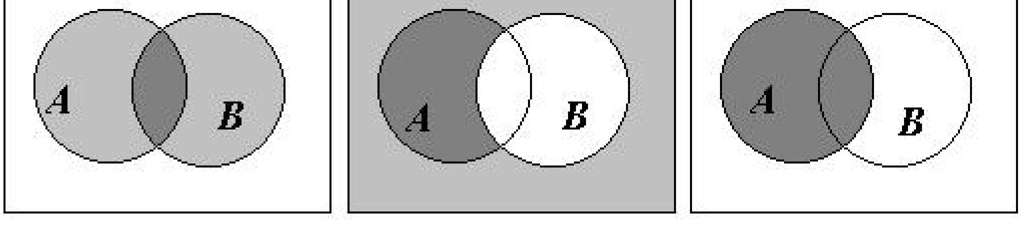
Докажем это тождество двумя способами: аналитически (используя равносильности алгебры множеств) и конструктивно (используя диаграммы Эйлера-Венна).

1.

[redacted]

2. Построим соответствующие диаграммы Эйлера-Венна .

[redacted] [redacted]



3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

1. Известно, что $x \in A$. Следует ли из этого, что $x \in A \cup B$?

2.Известно, что $x \in A \cup B$. Следует ли из этого, что $x \in A$?

3.Найдите объединение множеств, если:

а) A={a, b, c, d, e, f,}, B={b, e, f, k},

б) A={26, 39, 5, 58, 17, 81}, B={17, 26, 58}.

4.Из каких элементов состоит объединение множества букв в словах «МАТЕМАТИКА» и «ГЕОМЕТРИЯ»?

5.Найдите объединение множеств A и B, если

$A=\{x: -\leq x \leq\}$, $B=\{x: -\leq x \leq 2\}$.

6.C – множество букв в Вашем имени, D – множество гласных букв русского алфавита. Найдите множество $C \cup D$ и$D \cup C$ и сравните их. Для множеств C и D постройте диаграмму Эйлера–Венна.

7.M – объединение множества двузначных натуральных чисел и множества натуральных чисел от 1 до 7. Принадлежат ли множеству M числа: 14, 99, 100, 5, 7, 10?

8.Школьникам предложено начертить две фигуры, принадлежащие объединению множеств C и D, если:

а) C – множество ромбов, D – множество прямоугольников;

б) C – множество равнобедренных треугольников, D – множество прямоугольных треугольников.

Выполняя задание а), учащийся К. начертил квадрат и прямоугольник со сторонами 2 см и 3 см. Прав ли он?

Учащийся Р., выполняя задание б), начертил равносторонний треугольник и прямоугольный треугольник с катетами 2 см и 3 см. Верно ли он выполнил задание?

9.Назовите все множества, о которых идет речь в задаче:

а) У школы посадили 4 липы и 3 березы. Сколько всего деревьев посадили у школы?

б) У Коли было 6 книг. В день рождения ему подарили еще 4 книги. Сколько книг стало у Коли?

10. Известно, что $x \in A \cap B$. Следует ли из этого, что

а) $x \in B \cap A$; б)$x \in A \cup B$; в) $x \in B \cup A$?

11.Определите порядок выполнения действий в следующих выражениях:

а) $A \cup B \cup C$; б) $A \cap B \cap C$**;** в) $A \cap B \cup C \cap D$**;** г) $A \cup B \cap C \cup D$**.**

12.Постройте три круга, представляющие попарно пересекающиеся множества A, B и C. Отметьте штриховкой области, изображающие множества:

а) $A \cap B \cap C$**;** б) $A \cup B \cup C$; в) $(A \cap B) \cup C$.

13.Среди следующих выражений найдите такие, которые представляют собой равные множества:

а) б) в)

14. Даны множества: А – натуральных чисел, кратных 2, В – натуральных чисел, кратных 3, С – натуральных чисел, кратных 5.

а) Изобразите данные множества при помощи кругов Эйлера и покажите область, изображающую множество $A \cap B \cup C$.

б) Сформулируйте характеристическое свойство элементов этого множества и назовите 3 элемента, которые ему принадлежат.

в) Верно ли, что $A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?

4.Ответить на контрольные вопросы.

1. Что называется объединением множеств?
2. Как изобразить объединение множеств с помощью кругов Эйлера?
3. Как найти объединение конечных множеств, заданных перечислением элементов?
4. Как найти объединение множеств, заданных с помощью характеристического свойства элементов?
5. Какие свойства объединения множеств вам известны?
6. Какие свойства связывают операции объединения и пересечения множеств?
7. Какую операцию вы выполните первой, если в выражении есть знаки пересечения и объединения множеств и нет скобок?

Практическое занятие №29

Разбиение множества на классы.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся правильно производить классификацию множеств, разбивать множества на классы при помощи свойств.

Порядок выполнения.

1. Повторить теоретический материал.

2. Разобрать предложенные примеры.

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

1.Из множества X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} выделили подмножества X_1, X_2, X_3. В каком из следующих случаев множество X оказалось разбитым на классы:

а) X_1={1, 3, 5, 7, 11}, X_2={2, 4, 6, 8, 10, 12}, X_3={9};

б) X_1={1, 3, 5, 7, 9, 11}, X_2={2, 4, 6, 8, 10, 12}, X_3={10, 11, 12};

в) X_1={3, 6, 9, 12}, X_2={1, 5, 7, 11}, X_3={2, 10}?

2.Из множества X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} выделили подмножества:

а) A – четных чисел, B – нечетных чисел;

б) A – чисел, кратных 2, B – чисел, кратных 3, C – чисел, кратных 4;

в) А – нечетных однозначных чисел, В – четных двузначных чисел.

В каком случае произошло разбиение множества на классы?

3. На какие классы разбивается множество точек плоскости при помощи:

а) окружности; б) прямой.

4.На множестве натуральных чисел рассматривается свойство «быть кратным 7». Сколько классов разбиения множества натуральных чисел оно определяет? Назовите по два элемента из каждого класса.

5.Из множества четырехугольников выделили подмножество фигур с попарно параллельными сторонами. На какие классы разбивается множество четырехугольников с помощью свойства «иметь попарно параллельные стороны»? Начертите по два четырехугольника из каждого класса.

6.Изобразите при помощи кругов Эйлера множество N натуральных чисел и его подмножества: четных чисел и чисел, кратных 7. Можно ли утверждать, что множество N разбито:

а) на два класса: четных чисел и чисел, кратных 7;

б) на четыре класса: четных чисел, кратных 7; четных чисел, не кратных 7; нечетных чисел, кратных 7; нечетных чисел, не кратных 7.

7.На рисунке изображены множество X – студентов группы, А – множество спортсменов этой группы, В – множество отличников этой группы. Укажите классы разбиения множества X, полученные с помощью свойств «быть спортсменом» и «быть отличником», и охарактеризуйте каждый из них.

4.Ответить на контрольные вопросы.

1. Что такое классификация множеств и с чем она связана?
2. Каковы условия разбиения множества на классы?
3. В разбиении множества на классы с помощью одного, двух, трех, …, *n* свойств каково количество классов разбиения в каждом случае?

Тема 5.2 «элементы математической логики»

Практическое занятие №30
Формулы алгебры логики.

Цель: Содействовать развитию навыков обучающихся устанавливать истинность или ложность высказываний, составлять таблицы истинности.

Порядок выполнения.

1. **Повторить теоретический материал.**
2. **Разобрать предложенные примеры.**

Пример 1. Среди следующих предложений выделить высказывания, установить, истинны они или ложны:

1) река Волхов впадает в озеро Ильмень;
2) всякий человек имеет брата;
3) пейте томатный сок!;
4) существует человек, который моложе своего отца;

5) который час?;

6) ни один человек не весит более 1000 кг;

7) 23<5;

8) Для всех действительных чисел *x* и *y* равенство *x+y=y+x;*

9) $x^2 - 7x + 12 = 0$;

10) $x^2 - 7x + 12 = 0$

Решение. Легко видеть, что высказывания 4), 6), 8) – истинные, а высказывания 1), 2), 7 - ложные. Предложения 3), 5), 9), 10) не являются высказываниями.

Пример 2. Пусть *a* – высказывание «Студент Иванов изучает английский язык», b - высказывание «Студент Иванов успевает по математической логике». Дать словесную формулировку высказываний:

1) $a \wedge \overline{b}$; 2) $a \to b;$ 3) $\overline{b} \leftrightarrow \overline{a}$.

Решение. а) «Студент Иванов изучает английский язык и не успевает по математической логике»; в) «Студент Иванов не успевает по математической логике тогда и только тогда, когда он не изучает английский язык».

Пример 3. Составить таблицу истинности для высказывания $a \wedge \overline{b}$.

Решение. Таблица истинности для высказывания $a \wedge \overline{b}$ имеет вид:

a	*b*	$\overline{b}$	$a \wedge \overline{b}$
1	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**1**

3.Выполнить самостоятельно индивидуальные задания.

1. Обозначьте элементарные высказывания буквами и запишите следующие высказывания с помощью символов алгебры логики:

1) 45 кратно 3 и 42 кратно 3;

2) 45 кратно 3 и 12 не кратно;

5) если число 212 делится на 3 и 4, то оно делится на 12;

2. Найдите логическое значения x и y, при которых выполняется равенства:

1) $(1 \to x) \to y = 0$;

2) $x \vee y = \overline{x}.$

3.1) Известно, что импликация $x \to y$ истинна, а эквивалентность $x \leftrightarrow y$ ложна. Что можно сказать о значении импликации $y \to x$?

2) Известно, что эквивалентность $x \leftrightarrow y$ истинна. Что можно сказать о значениях импликации $\overline{x} \wedge y \to z$; $\overline{x} \to (y \vee z)$?

4. Пусть x=0, y=0, z=1. Определить логические значения нижеследующих сложных высказываний:

1) $x \wedge (y \wedge z)$;

2) $(x \wedge y) \wedge y$;

3) $x \to (y \to z)$;

4) $x \wedge y \to z$;

5) $(x \wedge y) \leftrightarrow (z \vee \overline{y})$;

6) $((x \vee y) \wedge z) \leftrightarrow ((x \wedge y) \wedge (y \wedge z))$.

5. Показать, что логические связки $\overline{b} \to \overline{a}$, $a \,\&\, \overline{b} \to \overline{a}$, $a \,\&\, \overline{b} \to \overline{b}$, $a \,\&\, \overline{b} \to л$, где л – фиксированное ложное высказывание, имеют ту же таблицу истинности, что и импликация $a \to b$.

6. Составить таблицы истинности для формул:

2) $(x \vee y) \to (x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \to \overline{y})$;

4) $x \wedge \overline{y} \to (y \vee \overline{x} \to \overline{z})$;

5) $(x_1 \to \overline{x_2}) \to (\overline{x_1 \vee x_2} \wedge \overline{z})$;

6) $(\overline{x} \vee z) \wedge (y \to (u \to x))$;

7. Установить, какие из следующих формул являются тождественно истинными, тождественно ложными:

1) $\overline{\overline{x \vee y} \to \overline{x \,\&\, y}}$;

2) $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$;

3) $((p \to q) \,\&\, (q \to r)) \to (p \to r)$;

4) $(p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to ((p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_3))$;

5) $\overline{(p_1 \to p_2) \to ((p_1 \wedge p) \to (p_2 \wedge p))}$.

4.Ответить на контрольные вопросы.

1.Что такое высказывание?
2.Что называют отрицанием высказывания?
3.Что называют конъюнкцией высказывания?
4.Что называют дизъюнкцией высказывания?
5.Что называют формулой алгебры логики?