**Тема 1.1 «Линейная алгебра»**

**Лекция №1**

**Матрицы и действия над ними.**

**План.**

**1 . Матрицы**
**2. Виды матриц.**
**3. Равенство матриц**
**4. Линейные операции над матрицами**
**5. Умножение матриц**
**6. Свойства умножения матриц**

## Матрицы

Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов. Для записи матрицы используется следующее обозначение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Для любого элемента $a_{ij}$, первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j - номер столбца. Сокращенно прямоугольную матрицу типа $m \times n$ можно записать так: A =( $a_{ij}$ ), где i =1, 2, ..., m; j =1, 2, ..., n.

## Виды матриц.

Если число строк матрицы не равно числу столбцов ($m \neq n$ ), то матрица называется прямоугольной. Таковы, например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

Если число строк равно числу столбцов (m = n), то матрица называется квадратной. Например, квадратными являются матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Число строк или столбцов квадратной матрицы называется ее порядком. Так, в последнем примере порядок матрицы A равен 2, а порядок матрицы B равен 3.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка 4: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

Диагональ, содержащую элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$ будем называть главной, а диагональ, содержащую элементы $a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}$ - побочной (или вспомогательной).

Среди квадратных матриц выделим матрицы, у которых отличны от нуля только элементы, находящиеся на главной диагонали: $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$

Такие матрицы называются диагональными; например, матрицы

A = $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$

являются диагональными матрицами второго и третьего порядка.
Если у диагональной матрицы все числа главной диагонали равны между собой, то такая диагональная матрица называется скалярной. Например, A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Если в скалярной матрице все числа главной диагонали равны единице, то матрица называется единичной и обозначается буквой Е: Е = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей и обозначается так: О = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

В прямоугольной матрице типа $m \times n$ возможен случай, когда m = 1. При этом получается матрица-строка: A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}$.

В случае, когда n = 1, получаем матрицу-столбец: B = $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}$.

Матрицы-строки и матрицы-столбцы называют векторами.

**Равенство матриц**

Две матрицы называются равными, если они имеют одинаковое число строк m и одинаковое число столбцов n и их соответствующие элементы равны. Так, матрицы A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ равны, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{13} = b_{13}$, $a_{21} = b_{21}$, $a_{22} = b_{22}$, $a_{23} = b_{23}$.

Равные матрицы обязательно имеют одно и то же строение: либо обе они прямоугольные типа $m \times n$, либо квадратные одного и того же порядка n.
Если в матрице переставить строки со столбцами, получим матрицу, которую будем называть транспонированной матрицей.

Например, матрицы А и В являются транспонированными A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 7 & 6 & 9 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$;

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ -2 & 6 & -3 \\ 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

В том случае, когда матрица состоит из одной строки (матрица-строка), т. е.
B=$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, транспонированная матрица является матрицей-столбцом:

$$B^т = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

**Линейные операции над матрицами**

Суммой матриц А и В называют такую матрицу, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц А и В. Складывать можно только матрицы, имеющие одинаковое строение: или прямоугольные типа $m \times n$, или квадратные порядка n.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$.

Тогда сумма матриц С = А+В имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

ЗАДАНИЕ. Сложить матрицы А и В, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение, а) Здесь А и В - квадратные матрицы второго порядка. Складывая их соответствующие элементы, получим

$$C = A+B = \begin{pmatrix} 2-1 & 4+3 \\ -1+1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Здесь А и В - прямоугольные матрицы типа 2$\times$ 3. Складываем их соответствующие элементы: $C = A + B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

в) Эти прямоугольные матрицы сложить нельзя, так как А есть матрица типа 3$\times$ 2, а В - матрица типа 2$\times$ 3; можно складывать только прямоугольные матрицы одного типа.

Мы видим, что сложение матриц сводится непосредственно к сложению их элементов, являющихся числами. Поэтому на сложение матриц распространяются важнейшие свойства чисел:

1) переместительный закон сложения: А+В=В+А, где А и В - либо квадратные матрицы одного порядка n, либо прямоугольные матрицы одного типа $m \times n$ ;

2) сочетательный закон сложения (А+В)+С=А+(В+С), где А, В, С - либо квадратные

матрицы одного порядка n, либо прямоугольные матрицы одного типа $m \times n$ .
3) поглощательный закон сложения A+0=A, т. е. существует такая нулевая матрица (того же порядка или типа), что ее сумма с матрицей A любого типа равна матрице A.
Для любой матрицы A существует матрица -A, такая, что A+(- A) = 0,т.е. матрица, противоположная A.
Произведением матрицы A на число k называется такая матрица kA, каждый элемент которой равен $ka_{ij}$, т. е. если A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, то кA = $\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$.

Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

ЗАДАНИЕ. Умножить матрицу A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ на число k = 3.

Решение. Умножая каждый элемент матрицы A на 3, получим

3A = $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

**Умножение матриц**

Рассмотрим умножение квадратных матриц второго порядка.

Пусть A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

Произведением этих матриц называется матрица

C = AB = $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$.

Чтобы найти элемент $c_{11}$ первой строки и первого столбца матрицы C, нужно каждый элемент первой строки матрицы A (т. е. $a_{11}$ и $a_{12}$) умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы B (т.е. $b_{11}$ и $b_{12}$) и полученные произведения сложить;
чтобы найти элемент $c_{12}$ первой строки и второго столбца матрицы C, нужно умножить все элементы первой строки ($a_{11}$ и $a_{12}$) на соответствующие элементы второго столбца ( $b_{12}$ и $b_{22}$) и полученные произведения сложить; аналогично находятся элементы $c_{21}$ и $c_{22}$.
Найти произведение матриц третьего порядка.

Пусть A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$, тогда C = AB = $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$, где

$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$; $c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$; $c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}$;
$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$; $c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$; $c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$;
$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31}$; $c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32}$; $c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$.

Пример: Найти произведение матриц A и B, если

A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. C = AB = $\begin{pmatrix} 3\cdot1+1\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot0 & 3\cdot(-1)+1\cdot1+1\cdot1 \\ 2\cdot1+1\cdot2+2\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot(-1)+2\cdot0 & 2\cdot(-1)+1\cdot1+2\cdot1 \\ 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot0 & 1\cdot(-1)+2\cdot1+3\cdot1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$

Правило нахождения матрицы-произведения распространяется на умножение прямоугольных матриц.
Для прямоугольных матриц справедливы следующие правила:
1) умножение матрицы А на матрицу В имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В;
2) в результате умножения двух прямоугольных матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько строк в первой матрице, и столько столбцов, сколько столбцов во второй матрице.

**Свойства умножения матриц**
1) Произведение двух матриц не подчиняется переместительному закону, т. е. AB≠ BA.
2) Для умножения матриц выполняется сочетательный закон: A(BC)=(AB)C.
3) Выполняется распределительный закон: (A+B)C=AC+BC.

## Лекция №2

## Обратная матрица.

Пусть дана матрица $\boldsymbol{A}$.

***Матрицей, обратной матрице А***, называется матрица $\boldsymbol{A^{-1}}$ такая, что $\boldsymbol{A^{-1}A = A\,A^{-1} = E}$.

Обратная матрица может существовать только для квадратной матрицы. Причем сама является той же размерности, что и исходная матрица.

Можно показать, что для того, чтобы квадратная матрица имела обратную, она должна быть невырожденной (т.е. $\Delta \neq 0$). Это условие является и достаточным для существования ***A-1***матрице $\boldsymbol{A}$. Итак, всякая невырожденная матрица имеет обратную, и, притом, единственную.

Сформулируем правило нахождения обратной матрицы на примере матрицы $\boldsymbol{A}$.
1. Находим определитель матрицы. Если $\Delta \neq 0$, то матрица $\boldsymbol{A^{-1}}$ существует.
2. Составим матрицу В алгебраических дополнений элементов исходной матрицы $\boldsymbol{A}$. Т.е. в матрице $\boldsymbol{B}$ элементом $\boldsymbol{i}$ - ой строки и $\boldsymbol{j}$ - го столбца будет алгебраическое дополнение $\boldsymbol{A_{ij}}$ (см. 1.3.) элемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ исходной матрицы.
3. Транспонируем матрицу $\boldsymbol{B}$ и получим $\boldsymbol{B^T}$.

***Транспонировать матрицу*** - это значит поменять строки и столбцы местами (первый столбец с первой строкой, второй столбец со второй строкой и т. д.).
4. Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} B^T.$$

После вычисления обратной матрицы рекомендуется убедиться в том, что выполняется одна из частей условия.

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

**Пример:** Найдем обратную матрицу для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

**Решение**

Вычисления произведем в соответствии с описанной схемой.

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$.
2. $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $B^T = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
5. $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица найдена верно.

## Лекция №3

### Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

**План.**

**1.Область применения матричного метода.**
**2.Матричный метод решения СЛУ.**
**3.Разбор примера.**

**Матричный метод решения СЛУ** применяют к решению систем уравнений, у которых количество уравнений соответствует количеству неизвестных. Метод лучше применять для решения систем низкого порядка. Матричный метод решения систем линейных уравнений основывается на применении свойств умножения матриц.

Этот способ, другими словами **метод обратной матрицы,** называют так, так как решение сводится к обычному матричному уравнению, для решения которого нужно найти обратную матрицу.

**Матричный метод решения** СЛУ с определителем, который больше или меньше нуля состоит в следующем:

Предположим, есть СЛУ (система линейных уравнений) с *n* неизвестными (над произвольным полем):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Значит, её легко перевести в матричную форму:

$AX=B$, где $A$ — основная матрица системы, $B$ и $X$ — столбцы свободных членов и решений системы соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Умножим это матричное уравнение слева на $A^{-1}$ — обратную матрицу к матрице $A$: $A^{-1}(AX)=A^{-1}B$.

Т.к. $A^{-1}A=E$, значит, $X=A^{-1}B$. Правая часть уравнения дает столбец решений начальной системы. Условием применимости матричного метода есть невырожденность матрицы $A$. Необходимым и достаточным условием этого есть неравенство нулю определителя матрицы $A$:

$$\det A \neq 0.$$

Для **однородной системы линейных уравнений**, т.е. если вектор $B=0$, выполняется обратное правило: у системы $AX=0$ есть нетривиальное (т.е. не равное нулю) решение лишь когда $detA=0$. Эта связь между решениями однородных и неоднородных систем линейных уравнений называется **альтернатива Фредгольма.**

Т.о., решение СЛУ матричным методом производится по формуле $X = A^{-1} \cdot B$. Либо, решение СЛУ находят при помощи **обратной матрицы** $A^{-1}$.

Известно, что у квадратной матрицы $A$ порядка $n$ на $n$ есть обратная матрица $A^{-1}$ только в том случае, если ее определитель ненулевой. Таким образом, систему $n$ линейных алгебраических уравнений с $n$ неизвестными решаем матричным методом только в случае, если определитель основной матрицы системы не равен нулю.

Не взирая на то, что есть ограничения возможности применения такого метода и существуют сложности вычислений при больших значениях коэффициентов и систем высокого порядка, метод можно легко реализовать на ЭВМ.

**Пример:**

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4; \\ 2x - y + 5z = 23; \\ x + 7y - z = 5; \end{cases}$$

Для начала проверим, не равен ли нулю определитель матрицы коэффициентов у неизвестных СЛУ.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 14 + 10 - 1 - 105 + 4 = -103;$$

Далее вычисляем алгебраические дополнения для элементов матрицы, которая состоит из коэффициентов при неизвестных. Эти коэффициенты нужны будут для вычисления обратной матрицы.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -34;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 15;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -17;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7;$$

Теперь находим **союзную матрицу**, транспонируем её и подставляем в формулу для определения обратной матрицы.

$$C^* = \begin{pmatrix} -34 & 7 & 15 \\ -5 & -2 & -19 \\ 9 & -17 & -7 \end{pmatrix};$$

$$(C^*)^T = \begin{pmatrix} -34 & -5 & 9 \\ 7 & -2 & -17 \\ 15 & -19 & -7 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (C^*)^T$$

Подставляем переменные в формулу:

$$A^{-1} = \frac{1}{-103} \cdot \begin{pmatrix} -34 & -5 & 9 \\ 7 & -2 & -17 \\ 15 & -19 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{34}{103} & \frac{5}{103} & -\frac{9}{103} \\ -\frac{7}{103} & \frac{2}{103} & \frac{17}{103} \\ -\frac{15}{103} & \frac{19}{103} & \frac{7}{103} \end{pmatrix};$$

Теперь находим неизвестные, перемножая обратную матрицу и столбик свободных членов.

$$X = A^{-1} \cdot B;$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{34}{103} & \frac{5}{103} & -\frac{9}{103} \\ -\frac{7}{103} & \frac{2}{103} & \frac{17}{103} \\ -\frac{15}{103} & \frac{19}{103} & \frac{7}{103} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Итак, *x=2; y=1; z=4.*

При переходе от обычного вида СЛУ к матричной форме будьте внимательными с порядком неизвестных переменных в уравнениях системы. *Например*:

$$\begin{cases} x_2 + 3x_1 = 7 \\ -2x_1 - 4x_2 = 5 \end{cases}$$

НЕЛЬЗЯ записать как:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Необходимо, для начала, упорядочить неизвестные переменные в кадом уравнении системы и только после этого переходить к матричной записи:

$$\begin{cases} x_2 + 3x_1 = 7 \\ -2x_1 - 4x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 7 \\ -2x_1 - 4x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

либо

$$\begin{cases} x_2 + 3x_1 = 7 \\ -2x_1 - 4x_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 3x_1 = 7 \\ -4x_2 - 2x_1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Кроме того, нужно быть внимательными с обозначением неизвестных переменных, вместо $x_1, x_2, \dots, x_n$ могут оказаться другие буквы. *К примеру*:

$$\begin{cases} x+2y-3z=7 \\ 2x-y+3z=5 \\ -2x+y-2z=1 \end{cases}$$

в матричной форме записываем так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вывод:

Матричным методом лучше решать системы линейных уравнений, в которых количество уравнений совпадает с числом неизвестных переменных и определитель основной матрицы системы не равен нулю. Когда в системе более 3-х уравнений, на нахождение обратной матрицы потребуется больше вычислительных усилий, поэтому, в этом случае целесообразно использовать для решения метод Гаусса.

**Лекция №4**

**Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.**

**План.**

1. **Область применения метода.**
2. **Прямой ход метода Гаусса.**
3. **Обратный ход метода Гаусса.**

Метод Гаусса является одним из самых наглядных и простых способов решения систем линейных алгебраических уравнений : как однородных, так и неоднородных. Коротко говоря, суть этого метода состоит в последовательном исключении неизвестных.

**Пример 1**

Решить системy линейных уравнений

x1+2x2=11;

3x1−x2=12.

методом Гаусса.

*Решение*

Это вводный пример, в котором поясняются самые простые понятия, лежащие в основе метода Гаусса. В следующем примере применение метода Гаусса будет разобрано пошагово.

Системы с двумя уравнениями и двумя переменными изучаются в школьном курсе математики, где для их решения применяются методы подстановки и сложения. Метод Гаусса, по сути, и представляет собой формализированный метод сложения. Для начала избавимся от переменной $x1$ во втором уравнении. Для этого из второго уравнения вычтем первое уравнение, предварительно умноженное на 3:

$$3x1-x2-3\cdot(x1+2x2)=12-3\cdot 11;3x1-x2-3x1-6x2=12-33;-7x2=-21.$$

Обычно первое уравнение системы обозначают римской цифрой I, а второе уравнение – римской цифрой II. И фразу "из второго уравнения вычтем первое уравнение, предварительно умноженное на 3" записывают коротко: $II-3\cdot I$. Заметьте, первое уравнение системы мы не изменяли. Мы затронули лишь второе уравнение, поэтому исходная система станет такой:

$$\{x1+2x2=11;-7x2=-21.$$

Разделив обе части второго уравнения $-7x2=-21$ на (-7) имеем: $x2=-21-7=3$. Сокращённо деление обеих частей второго уравнения на (-7) записывают так: $II:(-7)$. При этом система примет вид:

$$\{x1+2x2=11;x2=3.$$

Переменная $x2$ найдена. Осталось определить значение переменной $x1$. Для этой цели преобразуем первое уравнение, убрав из него переменную $x2$. Вычтем из первого уравнения второе уравнение, предварительно умноженное на 2 (т.е. выполним действие $I-2\cdot II$). Первое уравнение станет таким:

$$x1+2x2-2\cdot x2=11-2\cdot 3;x1=11-6=5.$$

Итак, $\{x1=5;x2=3.$

Ответ найден. Запишем то же решение, но уже без промежуточных пояснений. Решение методом Гаусса заданной системы будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1+2x_2=11; \\ 3x_1-x_2=12. \quad II-3\cdot I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2=11; \\ -7x_2=-21. \quad II:(-7) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2=11; \quad I-2\cdot II \\ x_2=3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=5; \\ x_2=3. \end{cases}$$

Однако такая форма записи неудобна. Гораздо удобнее работать с матричной формой записи. Запишем расширенную матрицу заданной системы. Когда мы вычитаем или складываем уравнения, то, по сути, мы складываем или вычитаем строки этой матрицы. В матричной форме записи метод Гаусса станет таким:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 3 & -1 & 12 \end{array}\right) II-3\cdot I \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 0 & -7 & -21 \end{array}\right) II:(-7) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) I-2\cdot II \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Отсюда имеем: x1=5, x2=3. Обратите внимание, что от матричной формы записи всегда можно перейти к уравнениям и наоборот. Например, вторая строка матрицы соответствует уравнению 0·x1−7·x2=−21, −7x2=−21.

Система решена, однако прочувствовать суть метода Гаусса на таком простом примере несколько затруднительно, посему перейдем к решению неоднородных систем уравнений с тремя (пример 2) и четырьмя (пример 3) неизвестными.

**Пример 2**

Решить систему уравнений

2x1+10x2−3x3=38;

−3x1−12x2+13x3=−82;

x1+3x2−5x3=27.

методом Гаусса.

*Решение*

При решении методом Гаусса удобно (но вовсе не обязательно), чтобы первый элемент первой строки расширенной матрицы системы равнялся единице, посему поменяем местами первую и третью строки матрицы A˜. Для самой системы это означает, что первое и третье уравнение поменяли местами: естественно, решение системы от этого не изменится.

*Примечание*

Вообще, менять местами строки расширенной матрицы системы можно на любом этапе решения методом Гаусса. При необходимости можно менять местами столбцы матрицы системы, однако нужно помнить, что при этом меняется порядок расположения переменных в уравнениях. Например, если мы меняем местами пятый и седьмой столбцы матрицы системы, это означает, что пятая и седьмая переменные (вместе со своими коэффициентами) поменялись местами во всех уравнениях заданной системы.

Метод Гаусса работает в два этапа: прямой ход и обратный. В предыдущем примере внимание на этом не акцентировалось, ибо пример был тривиальным, но во всех остальных примерах каждый этап будет рассмотрен пошагово.

Прямой ход метода Гаусса имеет своей целью приведение матрицы системы к верхнему треугольному или ступенчатому виду. Есть ли решения у системы (система совместна) или же решений нет (система несовместна) выяснится именно здесь, в конце прямого хода метода Гаусса.

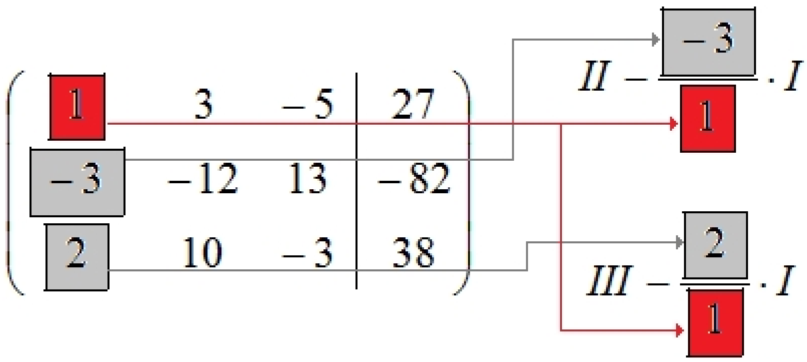
**Прямой ход метода Гаусса**

*Первый шаг*

Исключим из второго и третьего уравнений переменную x1, используя первое уравнение. Для матричной формы записи это означает обнуление элементов первого столбца, лежащих под первой строкой. Эти элементы выделены на рисунке серым цветом. А элемент, который будем использовать для обнуления, выделен красным цветом:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & -5 & 27 \\ \boxed{-3} & -12 & 13 & -82 \\ \boxed{2} & 10 & -3 & 38 \end{array}\right)$$

Мы станем изменять строки расширенной матрицы системы. Цель этих изменений: получить нули вместо "серых" элементов. Действия, которые мы осуществим с второй и третьей строками, показаны на рисунке:




Итак, нам нужны выполнить два преобразования со строками: II−−31·I и III−21·I. Так как −31=−3 и 21=2, то выражения для преобразований станут такими: II+3·I, III−2·I. Запись II+3·I означает, что к элементам второй строки прибавляются соответствующие элементы первой строки, умноженные на 3. А запись III−2·I говорит о том, что от элементов третьей строки вычитаются соответствующие элементы первой строки, умноженные на два. Если выполнение подобных операций в уме затруднительно (а поначалу именно так и бывает), то выпишите изменяемые строки отдельно. Например, так:

$$II+3\cdot I=\left(-3\quad -12\quad 13\mid -82\right)+3\cdot\left(1\quad 3\quad -5\mid 27\right)=\left|\begin{array}{l}\textit{умножаем на } 3\\ \textit{элементы первой строки}\end{array}\right|=$$

$$=\left(-3\quad -12\quad 13\mid -82\right)+\left(3\quad 9\quad -15\mid 81\right)=\left|\begin{array}{l}\textit{поэлементно суммируем}:\\ -3+3=0;\\ -12+9=-3;\\ 13+(-15)=-2;\\ -82+81=-1.\end{array}\right|=\left(0\quad -3\quad -2\mid -1\right)$$

$$III-2\cdot I=\left(2\quad 10\quad -3\mid 38\right)-2\cdot\left(1\quad 3\quad -5\mid 27\right)=\left|\begin{array}{l}\textit{умножаем на } 2\\ \textit{элементы первой строки}\end{array}\right|=$$

$$=\left(2\quad 10\quad -3\mid 38\right)-\left(2\quad 6\quad -10\mid 54\right)=\left|\begin{array}{l}\textit{поэлементно вычитаем}:\\ 2-2=0;\\ 10-6=4;\\ -3-(-10)=-3+10=7;\\ 38-54=-16\end{array}\right|=\left(0\quad 4\quad 7\mid -16\right)$$

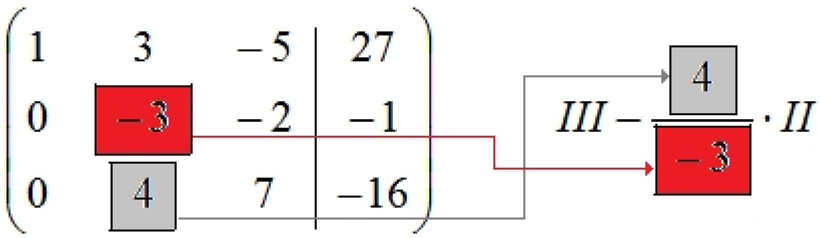
Требуемые преобразования строк осуществлены, осталось лишь записать их в новую матрицу. Первую строку мы не трогали, поэтому её перепишем без изменений:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 27 \\ -3 & -12 & 13 & -82 \\ 2 & 10 & -3 & 38 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II + 3 \cdot I \\ III - 2 \cdot I \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 27 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 7 & -16 \end{array}\right)$$

Итак, на *первом* шаге прямого хода мы обнулили элементы *первого* столбца (расположенные под *первой* строкой), используя *первую* строку.

*Второй шаг*

На *втором* шаге прямого хода нужно обнулить элементы *второго* столбца (расположенные под второй строкой), используя вторую строку. Т.е. обнулить нужно элемент, выделенный серым цветом. А использовать для обнуления будем элемент, выделенный красным. Преобразование, которое нужно выполнить, аналогично тому, что выполнялось на первом шаге:



Нужно выполнить действие III−4−3=III+43·II, т.е. к третьей строке прибавить соответствующие элементы второй строки, умноженные на 43. Тогда вместо третьей строки получим:

$$III + \frac{4}{3} \cdot II = (0 \quad 4 \quad 7 \mid -16) + \frac{4}{3} \cdot (0 \quad -3 \quad -2 \mid -1) = (0 \quad 4 \quad 7 \mid -16) +$$
$$+ \left(0 \quad -4 \quad -\frac{8}{3} \;\middle|\; -\frac{4}{3}\right) = \left(0 \quad 0 \quad \frac{13}{3} \;\middle|\; -\frac{52}{3}\right).$$

Это путь классического метода Гаусса, и если бы коэффициенты системы не были целыми числами, мы пошли бы именно этим путём.

Однако коэффициенты нашей системы – целые числа, поэтому переход к дробям можно отложить (или вообще избежать работы с дробями). Вместо "классического" действия III+43·II осуществим иное преобразование: к третьей строке, умноженной на 3, прибавим вторую строку, умноженную на 4:

$$3\cdot III+4\cdot II=3\cdot\begin{pmatrix}0 & 4 & 7 & | -16\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0 & -3 & -2 & | -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 12 & 21 & | -48\end{pmatrix}+$$
$$+\begin{pmatrix}0 & -12 & -8 & | -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 13 & | -52\end{pmatrix}.$$

Заметьте, оба действия (III+43·II и 3·III+4·II) позволяют добиться цели: обнулить "серый элемент" во втором столбце. Однако при выполнении операции 3·III+4·II не появились дроби, работать с которыми гораздо менее удобно, нежели с целыми числами. Скажу так: выбор способа в каждом конкретном случае остаётся на усмотрение решающего. Отмечу, что во всех учебных задачах коэффициенты систем целочисленны, поэтому в примерах на данной странице мы будем выбирать второй путь, ибо он позволяет избежать действий с дробями. Итак:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -5 & 27\\0 & -3 & -2 & -1\\0 & 4 & 7 & -16\end{array}\right)_{3\cdot III+4\cdot II}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -5 & 27\\0 & -3 & -2 & -1\\0 & 0 & 13 & -52\end{array}\right)$$

Прямой ход метода Гаусса закончен. Матрица системы (матрица слева от разделительной черты) стала верхней треугольной (все элементы ниже главной диагонали равны нулю).

Исходя из результатов прямого хода метода Гаусса, имеем: ранг расширенной матрицы системы (A˜) равен трем; ранг матрицы системы (A) также равен трем. Так как ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы системы и равен количеству неизвестных (rangA˜=rangA=3), то согласно следствию из теоремы Кронекера-Капелли данная система является определённой (т.е. имеет единственное решение).

Найдём это решение, используя обратный ход метода Гаусса. Замечу, что некоторые авторы комбинируют способы записи метода Гаусса, осуществляя прямой ход в форме матричной записи, а обратный ход – записывая уравнения. Мне эта комбинация разных форм записи представляется бессмыслицей, ибо матричная форма записи вполне удобна и наглядна.

Перед тем, как переходить к обратному ходу разделим третью строку расширенной матрицы системы на 13:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 27 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & -52 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ III:13 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 27 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

**Обратный ход метода Гаусса**

Если до этого мы «делали» нули под главной диагональю матрицы системы, то теперь настал черёд обнулить числа, расположенные над главной диагональю матрицы системы.

*Первый шаг*

Используя *третью* строку обнулим элементы *третьего* столбца, расположенные над *третьей* строкой (эти элементы −5 и −2 выделены серым цветом):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \boxed{-5} & 27 \\ 0 & -3 & \boxed{-2} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -4 \end{array}\right)$$

$$I - \frac{\boxed{-5}}{\boxed{1}} \cdot III = I + 5 \cdot III$$

$$II - \frac{\boxed{-2}}{\boxed{1}} \cdot III = II + 2 \cdot III$$

Выполняя требуемые преобразования с первой и второй строками, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 27 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} I + 5 \cdot III \\ II + 2 \cdot III \\ \phantom{x} \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Первый шаг обратного хода метода Гаусса окончен. Перед переходом ко второму шагу разделим вторую строку на $(-3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) II : (-3) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

*Второй шаг*

Используя вторую строку обнулим элемент второго столбца, расположенный над второй строкой (этот элемент 3 выделен серым цветом):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{3} & 0 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \qquad I-\frac{\boxed{3}}{\boxed{1}}\cdot II = I-3\cdot II$$

Осуществив требуемое преобразование с первой строкой мы завершим обратный ход метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{matrix} I-3\cdot II \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Решение системы окончено. Ответ таков: x1=−2, x2=3, x3=−4. Если пропустить все пояснения, то решение будет записано так:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 27 \\ -3 & -12 & 13 & -82 \\ 2 & 10 & -3 & 38 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ II+3\cdot I \\ III-2\cdot I \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 27 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 7 & -16 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ 3\cdot III+4\cdot II \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 27 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & -52 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ III:13 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 27 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{matrix} I+5\cdot III \\ II+2\cdot III \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) II:(-3) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{matrix} I-3\cdot II \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

*Ответ*: x1=−2, x2=3, x3=−4.

**Лекция №5**

**Определители второго и третьего порядков. Свойства определителей.**

**План.**

1. **Определитель второго порядка.**
2. **Определитель третьего порядка.**
3. **Основные свойства определителей.**
4. **Разложение определителя по строке.**

## 5.Определители высших порядков.

**Определителем второго порядка** называется число, полученное с помощью элементов квадратной матрицы 2-го порядка следующим образом:

[redacted].

При этом из произведения элементов, стоящих на так называемой главной диагонали матрицы (идущей из левого верхнего в правый нижний угол) вычитается произведение элементов, находящихся на второй, или побочной, диагонали.

Примеры.

1. [redacted] 2. [redacted]

**Определителем третьего порядка** называется число, определяемое с помощью элементов квадратной матрицы 3-го порядка следующим образом:

[redacted]

Замечание. Для того, чтобы легче запомнить эту формулу, можно использовать так называемое правило треугольников. Оно заключается в следующем: элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «+», располагаются так:

[redacted] образуя два треугольника, симметричных относительно главной диагонали. Элементы, произведения которых входят в определитель со знаком «-», располагаются аналогичным образом относительно побочной диагонали: [redacted]

.Примеры.

1. [redacted]

2. [redacted]

**Транспонированием** матрицы называется операция, в результате которой меняются местами строки и столбцы с сохранением порядка их следования. В результате получается матрица $A`$, называемая **транспонированной** по отношению к матрице $A$, элементы которой связаны с элементами $A$ соотношением $a`_{ij} = a_{ji}$ .

**Основные свойства определителей.**

Сформулируем и докажем основные свойства определителей 2-го и 3-го порядка (доказательство проведем для определителей 3-го порядка).

**Свойство 1.** Определитель не изменяется при транспонировании, т.е.

[redacted]

Доказательство.

[redacted]

= [redacted]

Замечание. Следующие свойства определителей будут формулироваться только для строк. При этом из свойства 1 следует, что теми же свойствами будут обладать и столбцы.

**Свойство 2.** При умножении элементов строки определителя на некоторое число весь определитель умножается на это число, т.е.

[redacted] [redacted] .

Доказательство.

[redacted]

[redacted]

**Свойство 3.** Определитель, имеющий нулевую строку, равен 0.

[redacted]

Доказательство этого свойства следует из свойства 2 при k = 0.

**Свойство 4.** Определитель, имеющий две равные строки, равен 0.

[redacted]

Доказательство.

[redacted]

**Свойство 5.** Определитель, две строки которого пропорциональны, равен 0.

[redacted]

Доказательство следует из свойств 2 и 4.

**Свойство 6.** При перестановке двух строк определителя он умножается на –1.

[redacted]

Доказательство.

[redacted]

**Свойство 7.**

[redacted]

Доказательство этого свойства можно провести самостоятельно, сравнив значения левой и правой частей равенства, найденные с помощью определения 1.5.

**Свойство 8.** Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

[redacted]

Доказательство следует из свойств 7 и 5.

**Разложение определителя по строке.**

**Минором** элемента определителя называется определитель, полученный из данного путем вычеркивания строки и столбца, в которых стоит выбранный элемент.

Обозначение: [redacted] выбранный элемент определителя, [redacted] его минор.

Пример. Для [redacted]

**Алгебраическим дополнением** [redacted] элемента определителя называется его минор, если сумма индексов данного элемента i+j есть число четное, или число, противоположное минору, если i+j нечетно, т.е. [redacted]

Рассмотрим еще один способ вычисления определителей третьего порядка – так называемое разложение по строке или столбцу. Для этого докажем следующую теорему:

***Теорема 1.1***. Определитель равен сумме произведений элементов любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения, т.е.

[redacted] где i=1,2,3.

Доказательство.

Докажем теорему для первой строки определителя, так как для любой другой строки или столбца можно провести аналогичные рассуждения и получить тот же результат.

Найдем алгебраические дополнения к элементам первой строки:

[redacted]

Тогда [redacted]

Таким образом, для вычисления определителя достаточно найти алгебраические дополнения к элементам какой-либо строки или столбца и вычислить сумму их произведений на соответствующие элементы определителя.

Пример. Вычислим определитель [redacted] с помощью разложения по первому столбцу. Заметим, что [redacted] при этом искать не требуется, так как [redacted] следовательно, и [redacted] Найдем [redacted] и [redacted] [redacted] Следовательно, [redacted] = [redacted]

**Определители более высоких порядков**.

**Определитель n-го порядка**

[redacted]

есть сумма n! членов [redacted] каждый из которых соответствует одному из n! упорядоченных множеств [redacted] полученных r попарными перестановками элементов из множества 1,2,…,n.

Замечание 1. Свойства определителей 3-го порядка справедливы и для определителей n-го порядка.

Замечание 2. На практике определители высоких порядков вычисляют с помощью разложения по строке или столбцу. Это позволяет понизить порядок вычисляемых определителей и в конечном счете свести задачу к нахождению определителей 3-го порядка.

Пример. Вычислим определитель 4-го порядка [redacted] с помощью разложения по 2-му столбцу. Для этого найдем [redacted] и [redacted]:

[redacted] Следовательно,

[redacted]

**Лекция №6**

**Решение систем линейных уравнений методом Крамера.**

**План.**

1. **Область применения метода Крамера.**
2. **Теорема Крамера.**
3. **Случаи при решении систем линейных уравнений.**
4. **Примеры решения систем.**

Метод Крамера основан на использовании определителей в решении систем линейных уравнений. Это значительно ускоряет процесс решения.

Метод Крамера может быть использован в решении системы стольких линейных уравнений, сколько в каждом уравнении неизвестных. Если определитель системы не равен нулю, то метод Крамера может быть использован в решении, если же равен нулю, то не может. Кроме того, метод Крамера может быть использован в решении систем линейных уравнений, имеющих единственное решение.

**Определение**. Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется определителем системы и обозначается [redacted](дельта).

Определители [redacted]

получаются путём замены коэффициентов при соответствующих неизвестных свободными членами:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}.$$

Формулы Крамера для нахождения неизвестных:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}.$$

Найти значения [redacted] и [redacted]возможно только при условии, если

[redacted].

Этот вывод следует из следующей теоремы.

**Теорема Крамера** . *Если определитель системы отличен от нуля, то система линейных уравнений имеет одно единственное решение, причём неизвестное равно отношению* *определителей. В знаменателе – определитель системы, а в числителе – определитель, полученный из определителя системы путём замены коэффициентов при этом неизвестном свободными членами. Эта теорема имеет место для системы линейных уравнений любого порядка.*

**Пример 1.** Решить систему линейных уравнений:

[redacted]. (2)

Согласно *теореме Крамера* имеем:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{1 \bullet 4 - 2 \bullet (-3)}{3 \bullet 4 - 1 \bullet 2} =$$

$$= \frac{4+6}{12-2} = \frac{10}{10} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{3 \bullet (-3) - 1 \bullet 1}{3 \bullet 4 - 1 \bullet 2} =$$

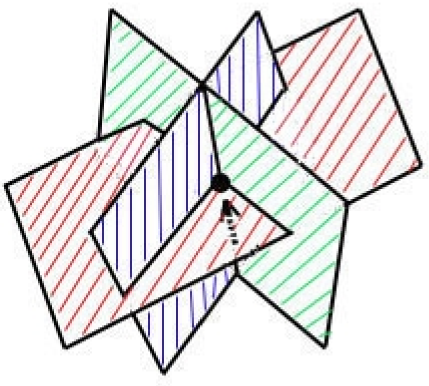
$$= \frac{-9-1}{12-2} = \frac{-10}{10} = -1.$$

Итак, решение системы (2):

[redacted]

**Три случая при решении систем линейных уравнений**

Как явствует из *теоремы Крамера*, при решении системы линейных уравнений могут встретиться три случая:

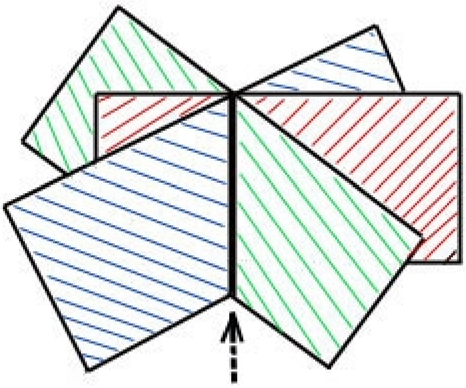


**Первый случай: система линейных уравнений имеет единственное решение**

(система совместна и определённа)

Условия:

* [redacted]



**Второй случай: система линейных уравнений имеет бесчисленное множество решений**

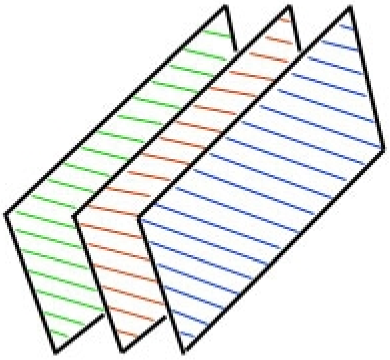
(система совместна и неопределённа)

Условия:

* [redacted],

** $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \ldots = \Delta_{x_n} = 0$,

т.е. коэффициенты при неизвестных и свободные члены пропорциональны.



**Третий случай: система линейных уравнений решений не имеет**

(система несовместна)

Условия:

* [redacted]

** $\Delta_{x_1} \neq 0,\ \Delta_{x_2} \neq 0, \ldots ,\Delta_{x_n} \neq 0$.

Итак, система *m* линейных уравнений с *n* переменными называется *несовместной*, если у неё нет ни одного решения, и *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Совместная система уравнений, имеющая только одно решение, называется *определённой*, а более одного – *неопределённой*.

**Примеры решения систем линейных уравнений методом Крамера**

Пусть дана система

[redacted].

На основании теоремы Крамера

[redacted]

[redacted]

…………

[redacted],

где

[redacted] -

определитель системы. Остальные определители получим, заменяя столбец с коэффициентами соответствующей переменной (неизвестного) свободными членами:

[redacted]

[redacted]

[redacted]

**Пример 2.** Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

[redacted].

Решение. Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2+6+12+1-16+9 =$$

$$= 14 \neq 0.$$

Следовательно, система является определённой. Для нахождения её решения вычисляем определители

[redacted]

[redacted]

[redacted]

По формулам Крамера находим:

[redacted]

[redacted]

[redacted] Итак, (1; 0; -1) – единственное решение системы.

Если в системе линейных уравнений в одном или нескольких уравнениях отсутствуют какие-либо переменные, то в определителе соответствующие им элементы равны нулю! Таков следующий пример.

**Пример 3.** Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$$

Решение. Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -6 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 18 - 4 + 3 - 12 - 0 = -31.$$

Посмотрите внимательно на систему уравнений и на определитель системы и повторите ответ на вопрос, в каких случаях один или несколько элементов определителя равны нулю. Итак, определитель не равен нулю, следовательно, система является определённой. Для нахождения её решения вычисляем определители при неизвестных

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -6 \\ 8 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 48 + 2 + 8 - 24 = -62.$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -6 \\ 3 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 16 - 36 + 3 + 48 + 0 =$$

$$= 31.$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{vmatrix} = -8-3-8+6-2-16 =$$

$$= -31.$$

По формулам Крамера находим:

$$x_1 = \frac{-62}{-31} = 2,$$

$$x_2 = \frac{31}{-31} = -1,$$

$$x_3 = \frac{-31}{-31} = 1.$$

Итак, решение системы - (2; -1; 1).

Как уже говорилось, если определитель системы равен нулю, а определители при неизвестных не равны нулю, система несовместна, то есть решений не имеет. Проиллюстрируем следующим примером.

**Пример 4.** Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{cases}$$

Решение. Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = -10-4-63+60+14+3 = 0.$$

Определитель системы равен нулю, следовательно, система линейных уравнений либо несовместна и определённа, либо несовместна, то есть не имеет решений. Для уточнения вычисляем определители при неизвестных

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & 1 \\ 5 & -7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -45-5+84+75-4+63 = 168.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -8+36+45+48-27-10 = 84.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 3 & -5 & -4 \\ 4 & -7 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -50 + 16 - 189 + 180 - 56 + 15 = -84.$$

Определители при неизвестных не равны нулю, следовательно, система несовместна, то есть не имеет решений.

## Тема 2.1 «Комплексные числа»

### Лекция №7
### Комплексные числа и их геометрическая интерпретация.

**План.**

1. **Определение комплексного числа.**
2. **Сумма, произведение, разность и частное комплексных чисел.**
3. **Геометрическая интерпретация комплексного числа.**

**Комплексным числом** $z$ называется пара $(x, y)$ действительных чисел $x$ и $y$. При этом равенство, сумма и произведение упорядоченных пар, а также отождествление некоторых из них с действительными числами определяются следующим образом:

1) два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ называются **равными**, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$;

2) **суммой** комплексных чисел $z_1$ и $z_2$ называется комплексное число $z$ вида

$$z = (x_1 + x_2, y_1 + y_2);$$

3) **произведением** комплексных чисел $z_1$ и $z_2$ называется комплексное число

$$z = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1);$$

4) множество комплексных чисел $(x,\ 0),\ x \in \mathbf{R}$, отождествляется с множеством действительных чисел **R**.

**Разностью** комплексных чисел $z_1$ и $z_2$ называется комплексное число $z$ такое, что $z_2 + z = z_1$, откуда находим $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

**Частным** комплексных чисел $z_1$ и $z_2$ называется комплексное число $z$ такое, что $z_2 \cdot z = z_1$. Отсюда находим

$$z = \left( \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},\ \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right).$$

Комплексное число (0, 1) обозначается символом $i = (0, 1)$. Тогда $(0,\ 1) \cdot (0,\ 1) = (-1,\ 0)$, т. е. $i^2 = -1$. Произвольное комплексное число $z$ можно записать в виде

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + iy.$$

Эта запись называется **алгебраической формой** комплексного числа. Комплексное число $\bar{z} = (x, -y) = x - iy$ называется **сопряженным** по отношению к комплексному числу $z = (x, y) = x + iy$.

**Геометрическая интерпретация комплексного числа**

Всякое комплексное число $z = (x, y)$ можно изобразить как точку на плоскости с координатами $x$ и $y$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется **комплексной плоскостью**, при этом ось $Ox$ называется **действительной**, а $Oy$ -**мнимой**.

Расстояние $r$ точки $z$ от нулевой точки, т. е. число

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}},$$

называется **модулем** комплексного числа $z$ и обозначается символом $|z|$.

Число

$$\theta = \begin{cases} arctg(y/x), & если \quad x > 0, \\ arctg(y/x) + \pi, & если \quad x < 0, \ y \geq 0, \\ arctg(y/x) - \pi, & если \quad x < 0, \ y < 0, \\ (\pi/2)\operatorname{sgn} y, & если \quad x = 0 \end{cases}$$

называем **аргументом** комплексного числа $z$ и обозначаем символом $\theta = \arg z$. При заданном $r$ углы, отличающиеся на $2n\pi, \ n \in \boldsymbol{Z}$, соответствуют одному и тому же числу. В этом случае записываем $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2n\pi, \ n \in \boldsymbol{Z};$ $\arg z$ называем **главным значением** аргумента.

Числа $r$ и $\theta$ называют **полярными координатами** комплексного числа $z$. В этом случае

$$z = (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

называется **тригонометрической формой** комплексного числа.

Если $z_1 = (r_1 \cos \theta_1, r_1 \sin \theta_1)$, $z_2 = (r_2 \cos \theta_2, r_2 \sin \theta_2)$, то

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), r_1 r_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1 - \theta_2), \ \frac{r_1}{r_2}\sin(\theta_1 - \theta_2)\right).$$

Для $n$-й степени числа $z = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ формула приобретает вид $z^n = (r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta)$.

При $r = 1$ соотношение приобретает вид $z^n = (\cos n\theta, \sin n\theta)$ и называется **формулой Муавра**.

Корень $n$-й степени из комплексного числа $z$ имеет $n$ различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n},\ \sqrt[n]{r}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),\ k = \overline{0,\ n-1}. \qquad (1)$$

**Пример 1.**

**Доказать, что: а)** $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$**; б)** $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$**; в)** $\overline{(z^n)} = \bar{z}^n,\ n \in \mathbf{N}$**.**

Решение.

Пусть $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$.

а) По определению сопряженного числа

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2,\ -y_1 - y_2) =$$

$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

б) Имеем

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)} = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ -x_1 y_2 - x_2 y_1) =$$

$$= (x_1, -y_1)(x_2, -y_2) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

в) Запишем комплексное число $z$ в тригонометрической форме $z = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$, тогда $\bar{z} = (r\cos(-\theta),\ r\sin(-\theta))$. Пользуясь формулой Муавра, имеем

$$\bar{z}^n = (r^n\cos(-n\theta),\ r^n\sin(-n\theta)) =$$

$$= (r^n\cos n\theta,\ -r^n\sin n\theta) = \overline{(r^n\cos n\theta,\ r^n\sin n\theta)} = \overline{(z^n)}.$$

## Лекция №8

### Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

**План.**

**1.Понятие комплексного числа, заданного в алгебраической форме.**
**2.Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.**

Комплексные числа - числа вида x+iy, где x,y∈R, а i, такое число, что i2=−1. Множество комплексных чисел обозначается C.

**Действия над комплексными числами.**

Сложение комплексных чисел:

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

Умножение двух комплексных чисел:

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=x_1x_2-y_1y_2+(x_1y_2+x_2y_1)i.$$

Умножение комплексного числа на действительное:

$$\lambda(x+iy)=\lambda x+i\lambda y.$$

Деление комплексных чисел:

$$x_1+iy_1x_2+iy_2=(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)=x_1x_2+y_1y_2+i(y_1x_2-x_1y_2)x_22+y_22=$$
$$x_1x_2+y_1y_2x_22+y_22+y_1x_2-x_1y_2x_22+y_22i.$$

Действительные числа $x$ и $y$ комплексного числа $z=x+iy$, называются действительной и мнимой частью числа $z$ и обозначаются, соответственно, $Rez=x$ и $Imz=y$.

Два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ называются равными в том и только том случае, если $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

Запись $z=x+iy$ называют алгебраической формой комплексного числа $z$.

Числа $z_1=x+iy$ и $z_2=x-iy$ называют сопряженными.

**Примеры:**

**Выполнить действия над комплексными числами, представив результат в алгебраической форме:** $(2+3i)(3-i)$.

**Решение:**

$(2+3i)(3-i)=6-2i+9i-3i2=6+7i+3=9+7i.$

**Ответ:** $9+7i$.

$(2i-i2)2+(1-3i)3.$

**Решение.**

$(2i-i2)2+(1-3i)3=(2i+1)2+1-3(3i)2+3(3i)-(3i)3= =4i2+4i+1-27i2+9i-27i3=-4+4i+1+27-9i+27i=24+22i.$

**Ответ:** $24+22i$.

$2-i1+i.$

**Решение.**

$$2-i1+i=(2-i)(1-i)(1+i)(1-i)=2-2i-i+i21-i2=2-3i-11+1=1-3i2=12-32i.$$

**Ответ:** $12-32i$.

$(1+i)(3+i)3-i-(1-i)(3-i)3+i.$

**Решение.**

(1+i)(3+i)3−i−(1−i)(3−i)3+i=(1+i)(3+i)(3+i)(3−i)(3+i)−
−(1−i)(3−i)(3−i)(3+i)(3−i)=9+15i+7i2+i39−i2−9−15i+7i2−i39−i2=
=9+15i−7−i−9+15i+7−i10=2810i=145i.

**Ответ:** 145i.

**Найти действительные решения следующего уравнения:** (1+i)x+(−2+5i)y=−4+17i.

**Решение.**

(1+i)x+(−2+5i)y=−4+17i⇒

x+xi−2y+5yi=−4+17i⇒

(x−2y)+(x+5y)i=−4+17i⇒

{x−2y=−4x+5y=17⇒{x=2y−42y−4+5y=17⇒{x=2y=3.

**Ответ:** x=2;y=3.

**Лекция №9**

**Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.**

**План.**

1. **Понятие комплексного числа, заданного в тригонометрической форме.**
2. **Первая формула Муавра.**
3. **Корень степени n.**
4. **Вторая формула Муавра.**

Пусть $z = a + bi,\ r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ и φ = arg *z*. Тогда по определению аргумента имеем:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Отсюда получается

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая форма называется **тригонометрической формой записи комплексного числа**. Как видно, для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа к тригонометрической форме, нужно найти его модуль и один из аргументов.

**Пример 1**

Записать число $z = 1 - \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

Решение

Найдём модуль этого числа: $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2.$ Аргумент данного числа находится из системы

$$\begin{cases} \cos \varphi = \dfrac{1}{2}, \\ \sin \varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Значит, один из аргументов числа $z = 1 - \sqrt{3}i$ равен $-\dfrac{\pi}{3}.$ Получаем:

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

**Ответ.** $2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right).$

Арифметические действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме, производятся следующим образом.

Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$. Имеем:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \cdot r_2(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Видно, что в тригонометрической форме операции умножения и деления производятся особенно просто: для того, чтобы перемножить (разделить) два комплексных числа, нужно перемножить (разделить) их модули и сложить (вычесть) их аргументы.

Отсюда следует, что для того чтобы перемножить $n$ комплексных чисел, нужно перемножить их модули и сложить аргументы: если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ – аргументы чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то

$$\arg(z_1 z_2 \ldots z_n) = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n,$$

$$|z_1 z_2 \ldots z_n| = |z_1||z_2| \ldots |z_n|.$$

В частности, если все эти числа равны между собой, то получим формулу, позволяющую возводить комплексное число в любую натуральную степень.

**Первая формула Муавра**:

$$z^n = \left(r\left(\cos \varphi + i \sin \varphi\right)\right)^n = r^n\left(\cos n\varphi + i \sin n\varphi\right).$$

**Пример 2**

Вычислить $z^4,$ если $z = 1 - \sqrt{3}i.$

Решение

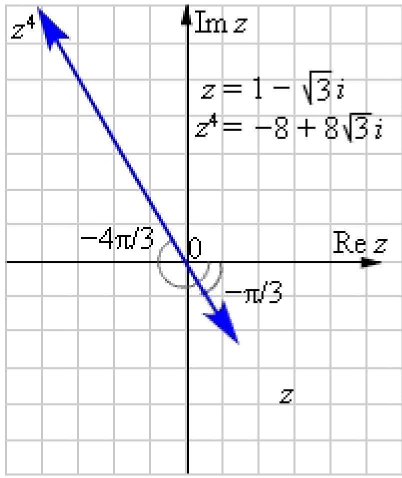



Рисунок 1.4.3.1

Как было найдено в предыдущем примере, данное число в тригонометрической форме имеет вид $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$ По первой формуле Муавра получаем:

$$z^4 = 2^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^4 = 2^4\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 2^4\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2^4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^3\left(\sqrt{3}i - 1\right) = 8\left(\sqrt{3}i - 1\right).$$

**Ответ.** $8(\sqrt{3}i - 1).$

Число $z$ называется **корнем степени** $n, n \in \mathbb{N},$ из комплексного числа $w$, если $z^n = w.$

Корень степени $n, n \in \mathbb{N},$ обозначается $z = \sqrt[n]{w}.$ Пусть теперь число $w$ фиксировано.

Найдём $z$ из уравнения $z^n = w.$

Если $w = 0$, то у уравнения $z^n = 0$ существует единственное решение $z = 0$.

Если $w \neq 0$, то положим, что нам известно тригонометрическое представление числа $w = r_0(\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0)$, и будем искать число $z$ также в тригонометрической форме: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Из определения аргумента и геометрической интерпретации комплексных чисел следует, что два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на угол, кратный $2\pi$. Имеем:

$$r^n = r_0,\ n\varphi = \varphi_0 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},$$

откуда получается:

$$r = \sqrt[n]{r_0},\ \varphi = \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Итак, все решения уравнения $z^n = w$ задаются формулой

$$z_k = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right).$$

Заметим, что если в эту формулу подставлять натуральные числа *k*, то при *k* = 0, 1, ..., *n* мы будем получать разные комплексные числа, а при *k* = *n* имеем:

$$z_n = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi n}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi n}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n}\right)\right) = z_0.$$

Значит, и в дальнейшем значения корней будут повторяться. Следовательно, существует ровно *n* корней уравнения $z^n = w,$ и все они задаются одной формулой.

**Вторая формула Муавра**:

$$z_k = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

**Пример 3**

Найти $\sqrt[3]{-1}.$

Решение

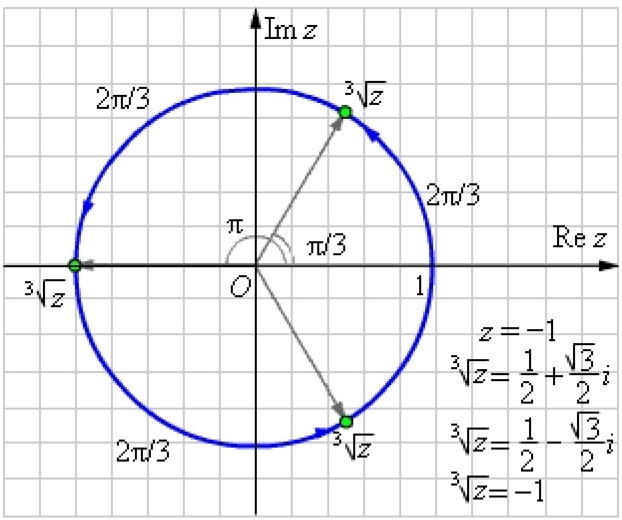



Рисунок 1.4.3.2

Представим число –1 в тригонометрической форме:

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi).$$

По второй формуле Муавра получаем:

$$z_k = \sqrt[3]{-1} = 1 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right), k = 0, 1, 2.$$

Получаем последовательно:

$$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2};$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0 = -1;$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

$\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, -1.$

**Ответ.**

## Лекция №10

### Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме.

**План.**

1. **Показательная форма комплексного числа.**
2. **Сложение комплексных чисел.**
3. **Вычитание комплексных чисел.**
4. **Умножение комплексных чисел.**
5. **Комплексно-сопряженные числа.**
6. **Деление комплексных чисел.**

Существует также показательная форма комплексного числа связанная с тригонометрической по формуле Эйлера:

$$|z_0| \cdot \exp(j \cdot \phi) = |z_0| \cdot (\cos(\phi) + j \cdot \sin(\phi)).$$

Данное соотношение легко доказать, если произвести разложение экспоненты в ряд Тейлора:

$$\exp(j \cdot \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j \cdot \phi)^n}{n!}.$$

Представим ряд в виде суммы четных и нечетных членов последовательности:

$$\exp(j \cdot \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j \cdot \phi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^{2 \cdot n} \cdot \phi^{2 \cdot n}}{(2 \cdot n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^{2 \cdot n+1} \cdot \phi^{2 \cdot n+1}}{(2 \cdot n+1)!}.$$

Рассмотрим более подробно мнимую единицу в четной и нечетной степенях. Выражение (1) задало $j^2 = -1$, тогда $j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$, в свою очередь $j^6 = j^4 \cdot j^2 = 1 \cdot (-1) = -1$. Таким образом можно рекурентно записать:

$$j^{2 \cdot n} = (-1)^n.$$

Построим аналогичным образом рекурентное соотношение для нечетных степеней: $j^1 = j$, тогда $j^3 = j \cdot j^2 = -j$, в свою очередь $j^5 = j^3 \cdot j^2 = j$, получим:

$$j^{2 \cdot n+1} = (-1)^n \cdot j.$$

Таким образом, выражение принимает вид:

$$\exp(j \cdot \phi) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \phi^{2 \cdot n}}{(2 \cdot n)!}}_{\cos(\phi)} + \underbrace{j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \phi^{2 \cdot n+1}}{(2 \cdot n+1)!}}_{j \cdot \sin(\phi)}.$$

В данном выражении  первая сумма по четным степеням дает разложение в ряд Тейлора функции косинуса, а вторая сумма по нечетным степеням дает разложение в ряд Тейлора функции синуса. Таким образом, получено доказательство справедливости формулы Эйлера. Используя формулу Эйлера можно сделать ряд важных замечаний: Замечание 1:

$$\exp\left(j \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = j.$$

Замечание 2:

$$\exp(j \cdot \pi) = \cos(\pi) + j \cdot \sin(\pi) = -1.$$

**Операции над комплексными числами. Сложение комплексных чисел**

Сумма двух комплексных чисел $z_0$ и $z_1$ есть также комплексное число $z = z_0 + z_1$:

$$z = x + j \cdot y = z_0 + z_1 = a + j \cdot b + c + j \cdot d = a + c + j \cdot (b + d).$$

Как следует из этого выражения при сложении реальные и мнимые части комплексного числа также складываются.

На комплексной плоскости операцию сложения можно реализовать как сложение векторов комплексных чисел по правилу параллелограмма (рисунок 3).

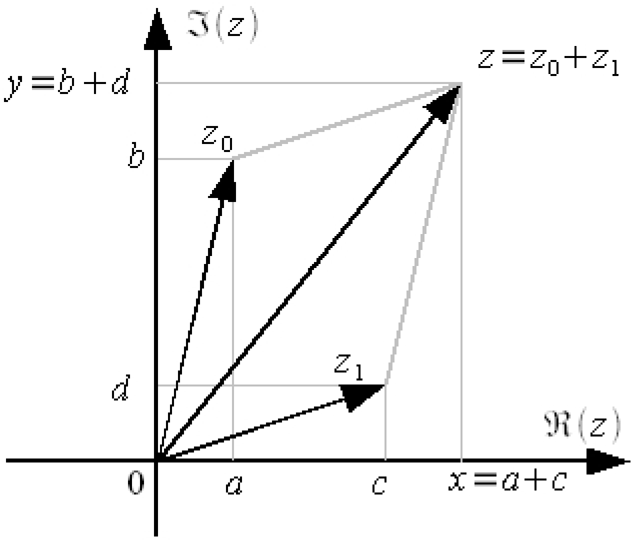



*Рисунок 3: Сложение комплексных чисел*

**Операции над комплексными числами. Вычитание комплексных чисел**

Разность двух комплексных чисел $z_0$ и $z_1$ есть также комплексное число $z = z_0 - z_1$:

$$z = x + j\cdot y = z_0 - z_1 = a + j\cdot b - (c + j\cdot d) = a - c + j\cdot(b - d).$$

Как следует из выражения (18) при вычитании реальные и мнимые части комплексного числа также вычитаются.

На комплексной плоскости операцию вычитания можно реализовать как вычитание векторов комплексных чисел по правилу параллелограмма (рисунок 4). На первом шаге из вектора $z_1$ формируется вектор $-z_1$ после чего вектор $-z_1$ складывается с вектором $z_0$ по правилу параллелограмма.

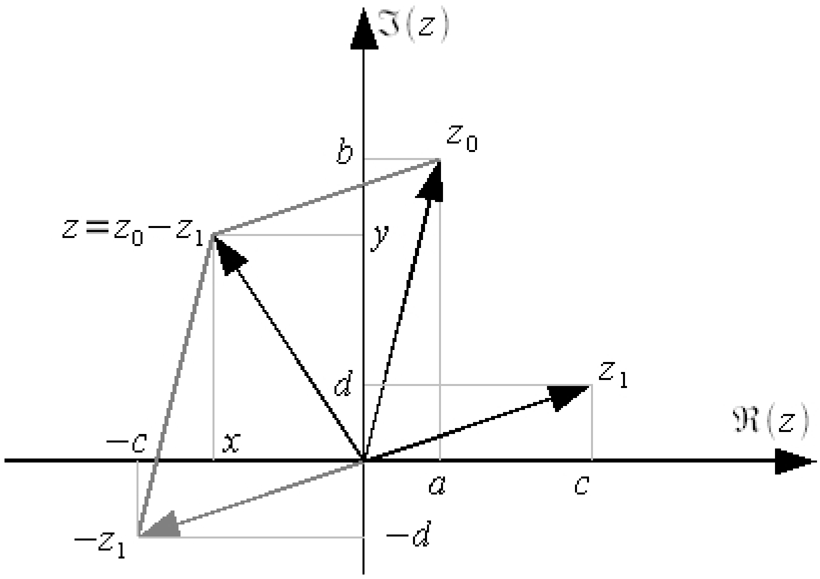



*Рисунок 4: Вычитание комплексных чисел*

**Операции над комплексными числами. Умножение комплексных чисел**

Для того чтобы получить формулу для умножения комплексных чисел необходимо перемножить два комплексных числа по правилу умножения многочленов:

$$z = z_1 \cdot z_0 = (a + j\cdot b)\cdot(c + j\cdot d) = a\cdot c + j\cdot a\cdot d + j\cdot b\cdot c + j\cdot j\cdot b\cdot d = \ldots$$
$$\ldots = (a\cdot c - b\cdot d) + j\cdot(a\cdot d + c\cdot b).$$

Таким образом получили также комплексное число. Умножать в явном виде комплексные числа не очень удобно, гораздо проще если привести их по формуле Эйлера к показательной форме:

$$z = z_1 \cdot z_0 = |z_1|\cdot \exp(j\cdot\phi_1)\cdot|z_0|\cdot\exp(j\cdot\phi_0) = |z_1|\cdot|z_0|\cdot\exp(j\cdot(\phi_1 + \phi_0)).$$

При перемножении в показательной форме модули комплексных чисел перемножаются, а фазы складываются. На векторной диаграмме это можно представить следующим образом (рисунок 5):

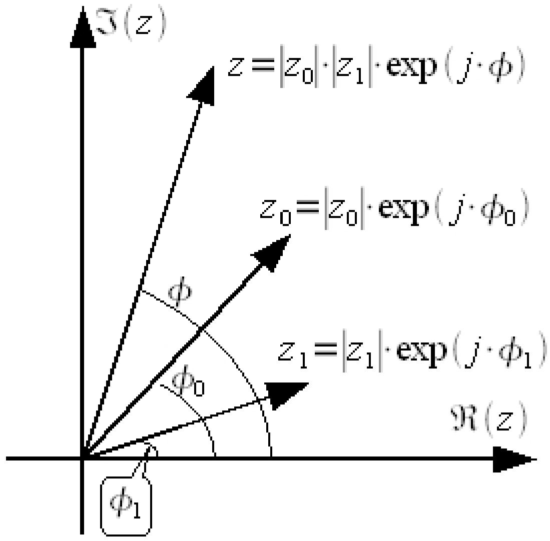



*Рисунок 5: Умножение комплексных чисел*

При перемножении результирующий вектор поворачивается и его длина изменяется.

Исходя из выражения умножение комплексного числа на чисто мнимое число приводит к повороту вектора на 90 градусов против часовой стрелки (к фазе $\phi$ прибавляется 90 градусов). При этом из выражения следует что умножение комплексного числа на -1 приводит повороту фазы на угол 180 градусов (вектор отражается относительно 0). Это очень важное замечание, так как емкости и индуктивности имеют чисто мнимые сопротивления и служат для поворота вектора комплексного сигнала, в то же время поворот фазы на 180 градусов позволяет сформировать фазоманипулированные сигналы.

**Комплексно-сопряженные числа**

Необходимо сделать еще одно замечание: числа $z_0=a+j\cdot b$ и $z_1=a-j\cdot b$ называются комплексно-сопряженными. При этом комплексно-сопряженное число обозначается чертой $z_1=\bar{z}_0$ Согласно выражениям (3) и (7) их модули равны, а фазы равны по модулю но имеют противоположные знаки:

$$|\bar{z}_0|=|z_0|, \quad \phi_{\bar{z}_0}=-\phi_{z_0}.$$

Произведение согласно выражению равно:

$$(a+j\cdot b)\cdot(a-j\cdot b)=a^2+b^2+j\cdot(a\cdot b-b\cdot a)=a^2+b^2=|z_0|^2.$$

Таким образом, произведение комплексно-сопряженных чисел есть действительное число равное квадрату модуля этих чисел. Векторное представление комплексно-сопряженных чисел представлено на рисунке 6.

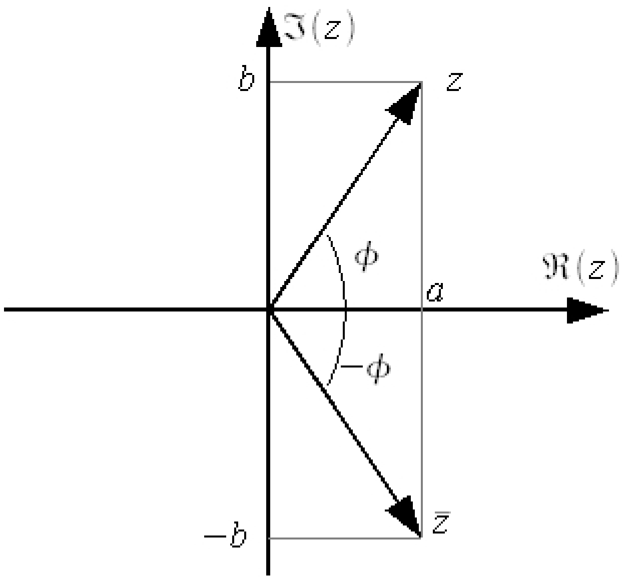



*Рисунок 6: Векторное представление комплексно-сопряженных чисел*

**Операции над комплексными числами. Деление комплексных чисел**

Последняя операция которую осталось рассмотреть — операция деления комплексных чисел. Рассмотрим деление в показательной форме:

$$z=\frac{z_1}{z_0}=\frac{|z_1|\cdot\exp(j\cdot\phi_1)}{|z_0|\cdot\exp(j\cdot\phi_0)}=\frac{|z_1|}{|z_0|}\cdot\exp(j\cdot(\phi_1-\phi_0))$$

Таким образом при делении комплексных чисел их модули делятся а фазы вычитаются. При делении необходимо чтобы $|z_0|>0$. Получим формулу для деления комплексных чисел в явной форме. Пусть

$$z=\frac{a+j\cdot b}{c+j\cdot d},$$

умножим и числитель и знаменатель дроби на число комплексно-сопряженное знаменателя:

$$z=\frac{(a+j\cdot b)}{(c+j\cdot d)}\cdot\frac{(c-j\cdot d)}{(c-j\cdot d)}.$$

Исходя из (22) в знаменателе дроби получим квадрат модуля знаменателя а числитель перемножим по правилу умножения комплексных чисел:

$$z=\frac{(a\cdot c+b\cdot d)+j\cdot(b\cdot c-a\cdot d)}{c^2+d^2}.$$

Поделив почленно реальную и мнимую часть числителя на знаменатель получим:

$$z=\frac{(a\cdot c+b\cdot d)}{c^2+d^2}+j\cdot\frac{(b\cdot c-a\cdot d)}{c^2+d^2}.$$

Это выражение - формула деления комплексных чисел в явной форме. Как можно заметить операции сложения и вычитания удобнее выполнять в явном виде, тогда как умножать и делить комплексные числа быстрее и легче в показательной форме.

**Тема 3.1 «Дифференциальное и интегральное исчисление»**

**Лекция №11**

## Понятие дифференциала функции и его свойства.

**План.**

1. **Понятие и геометрический смысл дифференциала.**
2. **О разных формах записи дифференциала.**
3. **Свойства дифференциала.**

### Понятие и геометрический смысл дифференциала.

**Определение.** Дифференциалом функции в некоторой точке *x* называется главная, линейная часть приращения функции.

Дифференциал функции $y = f(x)$ равен произведению её производной на приращение независимой переменной *x* (аргумента).

Это записывается так:

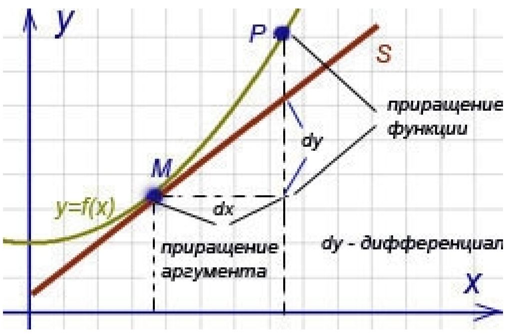
$$dy = y'\Delta x$$

или

$$df(x) = f'(x)\Delta x$$

или же

$$df(x) = f'(x)dx$$




**Геометрический смысл дифференциала.** Дифференциал функции $y = f(x)$ равен приращению ординаты касательной S, проведённой к графику этой функции в точке M($x$; $y$), при изменении *x* (аргумента) на величину [redacted] (см. рисунок).

**Почему дифференциал можно использовать в приближенных вычислениях?**

Дифференциал, $dy = y'\Delta x$ является главной, линейной относительно [redacted] частью приращения функции; чем меньше [redacted], тем большую долю приращения составляет эта часть. В этом можно убедиться, мысленно передвигая перпендикуляр, опущенный из точки *P* (см. рисунок) к оси *Ox*, ближе к началу координат. Поэтому при малых значениях [redacted] (и при $y' \neq 0$) **приращение функции можно приближенно заменить его главной частью** $y'\Delta x$, т.е.

$$\Delta y \approx y'\Delta x$$

**О разных формах записи дифференциала.**

Дифференциал функции в точке $x$ и обозначают

[redacted]

или

[redacted]

Следовательно,

$dy = y'\Delta x$ (1)

или

$df(x) = f'(x)\Delta x$, (2)

поскольку дифференциал функции $y = f(x)$ равен произведению её производной на приращение независимой переменной.

**Замечание.** Нужно помнить, что если $x$ – исходное значение аргумента, а [redacted] - наращенное значение, то производная в выражении дифференциала берётся в исходной точке $x$ ; в формуле (1) этого не видно из записи.

Дифференциал функции можно записать в другой форме:

$dy = y'dx$ (3)

или

$df(x) = f'(d)dx$ (4)

**Пример 1.** Найти дифференциалы функций:

1) [redacted];

2) [redacted];

3) [redacted];

4) [redacted].

Решение. Применяя формулы дифференцироивания степенной и логарифмической функций из таблицы производных, а также формулу (4), находим:

1) [redacted];

2) [redacted];

3) [redacted];

4) [redacted].

**Свойства дифференциала.**

В этом и следующем параграфах каждую из функций будем считать дифференцируемой при всех рассматриваемых значениях её аргументов.

Дифференциал обладает свойствами, аналогичными свойствам производной:

[redacted] (C – постоянная величина) (5)

[redacted] (6)

[redacted] (7)

[redacted] (8)

[redacted] (9)

Формулы (5) – (9) получаются из соответствующих формул для производной умножением обеих частей каждого равенства на [redacted].

**Лекция №12**
**Числовые последовательности.**
**План.**

1. **Понятие числовой последовательности.**
2. **Предел последовательности.**

***Последовательностью*** действительных чисел называется функция $f:N\to R$ определенная на множестве всех натуральных чисел. Число $f(n)$ называется n-м членом последовательности $x_n$, а формула $x_n=f(n)$ называется формулой общего члена последовательности $(x_n)_{n\in N}$.

Число a называется ***пределом последовательности*** $(x_n)_{n\in N}$ то есть если для любого $\varepsilon>0$существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.При этом сама последовательность называется ***сходящейся.***

***Критерий Коши.***

Для того чтобы последовательность $(x_n)_{n\in N}$ имела предел необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ существовал номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n+p-x_n|<\varepsilon$ для любого $p\in N$.

Последовательность $(x_n)_{n\in N}$ называется ***бесконечно малой***, если $\lim_{n\to\infty}=0$.

Последовательность $(x_n)_{n\in N}$ называется ***бесконечно большой*** (сходящейся к бесконечности), что записывается в виде $\lim_{n\to\infty}=\infty$, если для любого числа $E>0$ существует номер $N(E)$такой, что при $n>N(E)$ выполняется неравенство $|x_n|>E$. Если при этом начиная с некоторого номера, все члены положительны (отрицательны) то используется запись

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty}=+\infty \quad \lim_{n\to\infty}=-\infty$$

Число a называется ***предельной точкой*** последовательности $(x_n)_{n\in N}$ если для любого $\varepsilon>0$найдется бесконечно большое число членов этой последовательности, удовлетворяющих условию $|x_n-a|<\varepsilon$.

***Принцип Больцано-Вейерштрасса.***

Всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку.

Наибольшая (наименьшая) из предельных точек последовательности $(x_n)_{n\in N}$ назывется ***верхним (нижним) пределом*** этой последовательности и обозначается символом

$\overline{\lim}_{n\to\infty}x_n$ ($\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n$).

**Примеры.**

Написать первые пять членов последовательности:

$x_n=1+(-1)^n\frac{1}{n}$.

**Решение.**

$x_1=1+(-1)^1\frac{1}{1}=1-1=0$;

$x_2=1+(-1)^2\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=1,5$;

$x_3=1+(-1)^3\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$;

$x_4=1+(-1)^4\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}=1,25$;

$x_5=1+(-1)^5\frac{1}{5}=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}=0,8$.

**Ответ:** $0;1,5;\frac{2}{3};1,25;0,8$.

$x_n=\frac{3n+5}{2n-3}$.

**Решение.**

$x_1=\frac{3+5}{2-3}=-8$;

$x_2=\frac{6+5}{4-3}=11$;

$x_3=\frac{9+5}{6-3}=\frac{14}{3}$;

$x_4=\frac{12+5}{8-3}=\frac{17}{5}$;

$x_5=\frac{15+5}{10-3}=\frac{20}{7}$.

**Ответ:** $-8;11;143;175;207$.

Написать формулу общего члена последовательности:

$-12,13,-14,15,...$

**Решение.**

Из условия запишем:

$x1=-12;$

$x2=13;$

$x3=-14;$

$x4=15;$

Продолжая данный ряд, находим общий член последовательности:

$$xn=(-1)n1n+1.$$

**Ответ:** $xn=(-1)n1n+1$.

$0,2,0,2,...$

**Решение.**

Из условия запишем:

$x1=0;$

$x2=2;$

$x3=0;$

$x4=2;$

...

т.е. для нечетных номеров $x2k-1=0$,

а для четных $x2k=2$.

Общий член последовательности можно записать как $xn=1+(-1)n$.

**Ответ:** $xn=1+(-1)n$.

$1,0,-3,0,5,0,-7,0,...$

**Решение.**

Из условия запишем:

$x1=1;$

$x2=0;$

$x_3=-3$;

$x_4=0$;

...

т. е. для нечетных $x_{2k-1}=(2k-1)(-1)k+1$; либо $x_m=m(-1)m+12=m\cos m-12\pi$

а для четных $x_{2k}=0$ либо $x_m=m\cos\pi(m-1)2$.

Общий член последовательности можно записать как $x_n=n\cos\pi(n-1)2$.

**Ответ:** $x_n=n\cos\pi(n-1)2$.

Найдите наибольший (наименьший) член, ограниченной сверху (снизу) последовательности $(x_n)_{n\in N}$.

$x_n=6n-n2-5$.

**Решение.**

Очевидно, что $6n-n2=n(6-n)<0$ для всех $n\geq 6$, соответственно $6n-n2-5<-5$.Запишем несколько первых членов последовательности:

$x_1=6-1-5=0$;

$x_2=12-4-5=3$;

$x_3=18-9-5=4$;

$x_4=24-16-5=3$;

$x_5=30-25-5=0$;

$x_6=36-36-5=-5$;

$x_7=42-49-5=-12$

...

Наибольший член последовательности $x_3=4$.

**Ответ:** 4.

$x_n=-n22n$.

**Решение.**

Запишем несколько первых членов последовательности:

$x_1=-12$;

$x_2=-44=-1$;

$x_3=-98$;

$x_4=-1616=-1$;

$x_5=-2532$;

$x_6=-3664$;

......

Покажем, что для всех n≥3 выполняется неравенство |xn+1|<|xn|:

n22n>(n+1)2n+1=n2+2n+12n+1=n22·2n+n+12n+1⇒

⇒n22n+1>n+12n+1⇒n2>n+1⇒n>1+1n.

Это неравенство выполняется для всех n>2. Таким образом, последовательность xn=−n22nначиная с третьего члена монотонно возрастает и для всех членов последовательности выполняется неравенство −98≤xn<0.

Наименьший член последовательности x3=−98.

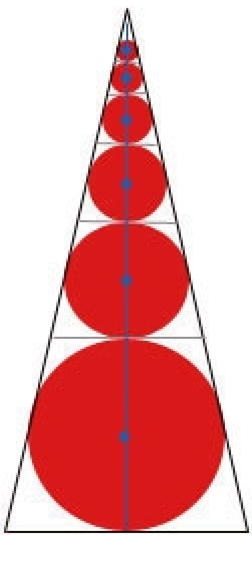
**Ответ:** x3=−98.

**Лекция №13**
**Функции одной переменной. Предел функции.**
**План.**

**1.Общее понятие предела.**
**2. Предел функции.**
**3. Основные теоремы о пределах.**
**4.Решение пределов через раскрытие неопределенностей.**
**5.Первый замечательный предел.**
**6.Второй замечательный предел.**

**Общее понятие предела.**

Обобщённое понятие предела: число *a* есть предел некоторой переменной величины, если в процессе своего изменения эта переменная величина неограниченно приближается к *a*.



**Поясним это на примере, который также проиллюстрируем. А после примера приведём общий алгоритм решения пределов.**

В нижнюю часть равнобедренного треугольника вписана окружность. Диаметр этой окружности обозначим как $d_1$. На рисунке диаметр проведён синим цветом. К окружности параллельно основанию первоначального треугольника проведена касательная (она на рисунке серого цвета). В результате получен треугольник, подобный первоначальному. В этот треугольник точно так же вписана окружность. Её диаметр - $d_2$(диаметры на рисунке ограничены касательными). Аналогичные построения продолжаются, пока позволяет высота треугольника. Получена последовательность уменьшающихся окружностей и соответствующая им последовательность длин их диаметров: $d_1, \ d_2, \ d_3, \ \ldots$. Эта последовательность длин диаметров даёт пример переменной величины $d_x$, которая с возрастанием номера окружности *x* неограниченно приближается к нулю. Предел этой последовательности равен нулю: $a = 0$.

Запишем приведённый пример на языке формул. Итак, номер окружности возрастает и стремится к бесконечности, то есть $x \to \infty$. Допустим, существует такой равнобедренный треугольник, что длина диаметра каждой вписанной в него окружности расчитывается по формуле

$$d_x = \frac{d_{x-1}}{x}.$$

Величина, которую нам требуется найти, будет записана так:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{d_{x-1}}{x}.$$

Lim это и есть предел, а под ним указывается переменная, которая стремится к определённому значению – нулю, любому другому числу, бесконечности.

Теперь вычислим предел, присвоив переменной *x* значение бесконечность (в более строгом определении это называется "доопределить функцию", с этим определением вы можете ознакомиться в последующих частях главы "Предел"). Примем, что конечная величина, поделенная на бесконечность, равна нулю:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{d_{x-1}}{x} = 0.$$

С рассмотренной последовательностью окружностей свяжем другую переменную величину $s_x$ - последовательность сумм их диаметров:

$$s_1 = d_1,$$
$$s_2 = d_1 + d_2,$$
$$s_3 = d_1 + d_2 + d_3,$$
……………………

Рассмотрев рисунок снова, обнаружим, что предел последовательности $s_x$ равен *h* – высоте равнобедренного треугольника. Вообще, предел может быть равен нулю, любому другому числу или бесконечности.

Теперь более строгие определения предела функции, которые Вас могут спросить на экзамене, и для понимания которых потребуется чуть больше внимания.

**Предел функции.**

**Предел функции при** $x \to x_0$

Пусть функция *f*(*x*) определена на некотором множестве *X* и пусть дана точка $x_0$. Возьмём из *X* последовательность точек, отличных от $x_0$:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots,$ (1)

сходящуюся к $x_0$. Значения функции в точках этой последовательности также образуют числовую последовательность

$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots,$ (2)

и можно ставить вопрос о существовании её предела.

**Определение 1.** Число *A* называется пределом функции *f*(*x*) в точке $x = x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любой сходящейся к $x_0$ последовательности (1) значений аргумента *x*, отличных от $x_0$, соответствующая последовательность (2) сходится к числу *A*.

Символически это записывается так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Это означает: чтобы найти предел функции, нужно в функцию вместо *x* подставить то значение, к которому стремится *x*.

**Пример 1.** Найти предел функции $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ при $x \to 0$.

Решение. Подставляем вместо *x* значение 0. Получаем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} = \frac{0 + 0 - 1}{0 - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Итак, предел данной функции при $x \to 0$ равен 1.

**Предел функции при $x \to \infty$, при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$**

Кроме рассмотренного понятия предела функции при $x \to x_0$ существует также понятие предела функции при стремлении аргумента к бесконечности.

**Определение 2.** Число *A* называется пределом функции *f*(*x*) при $x \to \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности (1) значений аргумента соответствующая последовательность (2) значений функции сходится к *A*.

Символически это записывается так: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

**Определение 3.** Число *A* называется пределом функции *f*(*x*) при $x \to -\infty$ ($x \to +\infty$), если для любой бесконечно большой последовательности значений аргумента, элементы $x_n$ которой положительны (отрицательны), соответствующая последовательность (2) значений функции сходится к *A*.

Символически это записывается так: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ ($\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$).

Это, как и в случае определения 1, означает: чтобы найти предел функции, нужно в функцию вместо *x* подставить бесконечность, плюс бесконечность или минус бесконечность.

**Пример 2.** Найти предел функции $f(x) = \frac{1}{x}$ при $x \to \infty$.

Решение. Подставляем вместо *x* бесконечность. Получаем, что последовательность значений функции является бесконечно малой величиной и поэтому имеет предел, равный нулю:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$.

Для наглядности и убедительности, решая данный пример в черновике, можете подставить вместо *x* супербольшое число. При делении получите супермалое число.

**Основные теоремы о пределах.**

**Теорема 1.** (о единственности предела функции). *Функция не может иметь более одного предела.*

**Следствие.** Если две функции *f*(*x*) и *g*(*x*) равны в некоторой окрестности точки [redacted], за исключением, может быть, самой точки [redacted], то либо они имеют один и тот же предел при [redacted], либо обе не имеют предела в этой точке.

**Теорема 2.** *Если функции f(x) и g(x) имеют пределы в точке* [redacted], *то:*

1) *предел алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме пределов слагаемых,* т.е.

[redacted] (3)

2) *предел произведения функций равен произведению пределов сомножителей*, т.е.

[redacted] (4)

3)*предел частного двух функций равен частному от деления предела делимого на предел делителя, если предел делителя не равен нулю,* т.е.

[redacted] (5)

**Замечание.** Формулы (3) и (4) справедливы для любого конечного числа функций.

**Следствие 1.** *Предел постоянной равен самой постоянной*, т.е.

[redacted]

**Следствие 2.** *Постоянный множитель можно выносить за знак предела*, т.е.

[redacted]

**Пример 3.** Найти предел:

[redacted]

Решение.

$$\lim_{x\to 4}\left[2(x+3)-\frac{x}{x-2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 4}2(x+3)-\lim_{x\to 4}\frac{x}{x-2}=$$

$$=2\lim_{x\to 4}(x+3)-\frac{\lim\limits_{x\to 4}x}{\lim\limits_{x\to 4}(x-2)}=$$

$$=2(4+3)-\frac{4}{4-2}=12.$$

**Пример 4.** Найти предел:

[redacted]

Решение. Предварительно убедимся, что предел делителя не равен нулю:

[redacted]

Таким образом, формула (5) применима и, значит,

[redacted]

**Теорема 3** (о пределе сложной функции). *Если существует конечный предел*

[redacted]

*а функция f(u) непрерывна в точке* [redacted]*, то*

[redacted]

Другими словами, *для непрерывных функций символы предела и функции можно поменять местами*.

Непосредственное применение теорем о пределах, однако, не всегда приводит к цели. Например, нельзя применить теорему о пределе частного, если предел делителя равен нулю. В таких случаях необходимо предварительно тождественно преобразовать функцию, чтобы иметь возможность применить следствие из теоремы 1.

**Пример 5.** Найти предел:

[redacted]

Решение. Теорема о пределе частного здесь неприменима, так как

[redacted]

Преобразуем заданную дробь, разложив числитель и знаменатель на множители. В числителе получим

[redacted]

где

[redacted]

корни квадратного уравнения. Теперь сократим дробь и, используя следствие из теоремы 1, вычислим предел данной функции:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2} \frac{2(x-2)(x+0,5)}{x(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{2x+1}{x} = \frac{5}{2}.$$

**Решение пределов через раскрытие неопределённостей.**

При решении примера 5 нам уже встретилась неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Эта неопределённость и неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$ - самые распространённые неопределённости, которые требуется раскрывать при решении пределов.

Большая часть задач на пределы, попадающихся студентам, как раз несут в себе такие неопределённости. Для их раскрытия или, точнее, ухода от неопределённостей существует несколько искусственных приёмов преобразования вида выражения под знаком предела. Эти приёмы следующие: почленное деление числителя и знаменателя на старшую степень переменной, домножение на сопряжённое выражение и разложение на множители для последующего сокращения с использованием решений квадратных уравнений и формул сокращённого умножения.

Освоим эти приёмы на примерах.

**Неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$**

**Пример 6.** Раскрыть неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ и найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+n^2+3}{3n^2+1}$.

Решение. Здесь старшая степень переменной *n* равна 2. Поэтому почленно делим числитель и знаменатель на $n^2$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+n^2+3}{3n^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{0\nwarrow}{\frac{2n}{n^2}}+\overset{1\nwarrow}{\frac{n^2}{n^2}}+\overset{0\nwarrow}{\frac{3}{n^2}}}{\underset{3\swarrow}{\frac{3n^2}{n^2}}+\underset{\searrow 0}{\frac{1}{n^2}}}.$$

Комментарий к правой части выражения. Стрелками и цифрами обозначено, к чему стремятся дроби после подстановки вместо *n* значения бесконечность. Здесь, как и в примере 2, степень *n* в знаменателя больше, чем в числителе, в результате чего вся дробь стремится к бесконечно малой величине или "супермалому числу".

Получаем ответ: предел данной функции при переменной, стремящейся к бесконечности, равен $\frac{1}{3}$.

**Пример 7.** Раскрыть неопределённость $\frac{\infty}{\infty}$ и найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x+3x^2}}{x+2}$.

Решение. Здесь старшая степень переменной *x* равна 1. Поэтому почленно делим числитель и знаменатель на *x*:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x+3x^2}}{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt[3]{x+3x^2}}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\frac{x+3x^2}{x^3}}}{1+\frac{2}{n}}=$$

$$=\frac{0}{1}=0.$$

Комментарий к ходу решения. В числителе загоняем "икс" под корень третьей степени, а чтобы его первоначальная степень (1) оставалась неизменной, присваиваем ему ту же степень, что и у корня, то есть 3. Стрелок и дополнительных чисел в этой записи уже нет, так что попробуйте мысленно, но по аналогии с предыдущим примером определить, к чему стремятся выражения в числителе и знаменателе после подстановки бесконечности вместо "икса".

Получили ответ: предел данной функции при переменной, стремящейся к бесконечности, равен нулю.

**Неопределённость вида** $\frac{0}{0}$

**Пример 8.** Раскрыть неопределённость $\frac{0}{0}$ и найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}$.

Решение. В числителе - разность кубов. Разложим её на множители, применяя формулу сокращённого умножения из курса школьной математики:

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$$

В знаменателе - квадратный трёхчлен, который разложим на множители, решив квадратное уравнение

$$x^2+x-6=0$$

$$D=b^2-4ac=1-4\bullet 1\bullet(-6)=25$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1+5}{2}=2$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1-5}{2}=-3$$

$$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$$

Запишем выражение, полученное в результате преобразований и найдём предел функции:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+3}=$$

$$=\frac{4+4+4}{2+3}=\frac{12}{5}.$$

**Пример 9.** Раскрыть неопределённость $\frac{0}{0}$ и найти предел

[redacted]

Решение. Теорема о пределе частного здесь неприменима, поскольку

[redacted]

Поэтому тождественно преобразуем дробь: умножив числитель и знаменатель на двучлен, сопряжённый знаменателю, и сократим на $x$ +1. Согласно следствию из теоремы 1, получим выражение, решая которое, находим искомый предел:

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}-3x\right)}{\left(\sqrt{x^2+8}+3x\right)\left(\sqrt{x^2+8}-3x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+8}-3x\right)}{8(1-x)(1+x)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+8}-3x}{8(1-x)}=\frac{3}{8}.$$

**Пример 10.** Раскрыть неопределённость $\frac{0}{0}$ и найти предел

[redacted]

Решение. Непосредственная подстановка значения $x$ = 0 в заданную функцию приводит к неопределённости вида 0/0. Чтобы раскрыть её, выполним тождественные преобразования и получим в итоге искомый предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3+3x^2}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}x^2+\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}x=0.$$

**Первый замечательный предел.**

Замечательных пределов существует несколько, но самыми известными являются первый и второй замечательные пределы. Замечательность этих пределов состоит в том, что они имеют широкое применение и с их помощью можно найти и другие пределы, встречающиеся в многочисленных задачах. Этим мы и будем заниматься в практической части данного урока. Для решения задач путём приведения к первому или второму замечательному пределу не нужно раскрывать содержащиеся в них неопределённости, поскольку значения этих пределов уже давно вывели великие математики.

*Первым замечательным пределом* называется предел отношения синуса бесконечно малой дуги к той же дуге, выраженной в радианной мере:

[redacted]

Приведённое выше равенство основано на эквивалентности бесконечно малых $\sin x \sim x$. Следовательно, верно равенство и следующего отношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$.

Это разновидность первого замечательного предела.

Заметим: если под знаком предела находится тригонометрическая функция, это почти верный признак того, что это выражение можно привести к первому замечательнному пределу.

**Второй замечательный предел.**

Вторым замечательным пределом называется предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$,

где

$e=2,718284...$ - иррациональное число.

Непосредственная подстановка бесконечности в выражение приводит к бесконечности вида $1^\infty$.

Значит, если при непосредственном вычислении предела у вас получилась неопределённость такого вида, то решать задачу следует путём приведения ко второму замечательному пределу. Во всех этих задачах для получения второго замечательного предела требуется производить замену сложной функции более простой. Переходим к примерам.

Второй замечательный предел может быть записан в другом виде, если положить

[redacted]

тогда

[redacted]

Из условия

[redacted]

получим

[redacted]

**Лекция №14**

**Производная функции.**

**План.**

**1.Понятие производной.**

**2.Физический смысл производной.**
**3.Геометрический смысл производной.**
**4.Таблица производных простых функций. Правила дифференцирования.**
**5.Таблица производных некоторых сложных функций.**

**Понятие производной.**

Производная - главнейшее понятие математического анализа. Она характеризует изменение функции аргумента $x$ в некоторой точке. При этом и сама производная является функцией от аргумента $x$

*Производной* функции [redacted] в точке [redacted] называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

То есть,

[redacted] (1)

Наиболее употребительны следующие обозначения производной:

[redacted]

**Пример 1.** Пользуясь определением производной, найти производную функции

$y=\sqrt{x+1}$.

Решение. Из определения производной вытекает следующая схема её вычисления.

Дадим аргументу приращение (дельта) и найдём приращение функции:

$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}$.

Найдём отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\frac{x+\Delta x+1-(x+1)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}.$$

Вычислим предел этого отношения при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, то есть искомую производную:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

**Физический смысл производной.**

К понятию производной привело изучение Галилео Галилеем закона свободного падения тел, а в более широком смысле - задачи о мгновенной скорости неравномерного прямолинейного движения точки.

Пусть камешек поднят и затем из состояния покоя отпущен. Путь *s*, проходимый за время *t*, является функцией времени, т.е. $s = s(t)$. Если задан закон движения точки, то можно определить среднюю скорость за любой промежуток времени. Пусть в момент времени $t_1=t$ камешек находился в положении *A*, а в момент $t_2=t+\Delta t$ - в положении *B*. За промежуток времени $\Delta t$ (от *t* до $t+\Delta t$) точка прошла путь $|AB|=s(t+\Delta t)-s(t)=\Delta s$. Поэтому средняя скорость движения за этот промежуток времени, которую обзначим через $v_{\Delta t}$, составляет

$$v_{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Однако движение свободно падающего тела явно неравномерное. Скорость *v*падения постоянно возрастает. То есть, средней скорости уже недостаточно для характеристики быстроты движения на различных участках пути. Такая характеристика тем точнее, чем меньше промежуток времени $\Delta t$. Поэтому вводится следующее понятие: мгновенной скоростью прямолинейного движения (или скоростью в данный момент времени *t*) называется предел средней скорости при $\Delta t\to 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

(при условии, что этот предел существует и конечен).

Таким образом, мгновенная скорость есть предел отношения приращения функции $s(t)$ к приращению аргумента $t$ при $\Delta t \to 0$ Это и есть производная, которая в общем виде записывается так:.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Решение обозначенной задачи представляет собой физический смысл производной. Итак, производной функции $y=f(x)$ в точке $x$ называется предел (если он существует и конечен) приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

**Пример 2.** Найти производную функции

[redacted]

Решение. Из определения производной вытекает следующая схема для её вычисления.

Шаг 1. Дадим аргументу приращение [redacted] и найдём

[redacted]

Шаг 2. Найдём приращение функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) =$$
$$= \left[2x^2 + 4x \bullet \Delta x + 2(\Delta x)^2 + 1\right] - \left(2x^2 + 1\right) =$$
$$= 4x \bullet \Delta x + 2(\Delta x)^2.$$

Шаг 3. Найдём отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x \bullet \Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x)}{\Delta x} =$$
$$= 4x + 2\Delta x.$$

Шаг 4. Вычислим предел этого отношения при [redacted], т.е. производную:

[redacted]

**Геометрический смысл производной.**

Пусть функция [redacted] определена на интервале [redacted] и пусть точка $M$ на графике функции соответствует значению аргумента [redacted], а точка $P$ – значению [redacted]. Проведём через точки $M$ и $P$ прямую и назовём её *секущей*. Обозначим через [redacted] угол между секущей и осью [redacted]. Очевидно, что этот угол зависит от [redacted].

Если существует

[redacted]

то прямую с угловым коэффициентом

[redacted]

проходящую через точку [redacted], называют предельным положением секущей $MP$ при [redacted] (или при [redacted]).

Касательной к графику функции [redacted] в точке $M$ называется предельное положение секущей $MP$ при [redacted], или, что то же при [redacted].

Из определения следует, что для существования касательной достаточно, чтобы существовал предел

[redacted],

причём предел [redacted] равен углу наклона касательной к оси [redacted].

Теперь дадим точное определение касательной.

*Касательной* к графику функции [redacted] в точке [redacted] называется прямая, проходящая через точку [redacted] и имеющая угловой коэффициент [redacted], т.е. прямая, уравнение которой

[redacted]

Из этого определения следует, что производная функции [redacted] равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке с абсциссой $x$. В этом состоит геометрический смысл производной. Таким образом,

[redacted]

где [redacted] - угол наклона касательной к оси абсцисс, т.е. угловой коэффициент касательной.

**Пример 3.** Найти производную функции [redacted] и значение этой производной при [redacted].

Решение. Воспользуемся схемой, приведённой в примере 1.

Шаг 1.

[redacted]

Шаг 2.

[redacted]

Шаг 3.

[redacted]

Шаг 4.

[redacted]

Выражение под знаком предела не определено при [redacted](неопределённость вида 0/0), поэтому преобразуем его, избавившись от иррациональности в числителе и затем сократив дробь:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Найдём значение производной при [redacted]:

[redacted]

**Таблица производных простых функций.**

| | |
|---|---|
| 1. Производная константы (числа) | $C' = 0$ |
| 2. Производная независимой переменной | $x' = 1$ |
| 3. Производная степени | $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ |
| 4. Производная переменной в степени -1 | $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ |
| 5. Производная квадратного корня | $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| 6. Производная синуса | $\left(\sin x\right)' = \cos x$ |
| 7. Производная косинуса | $\left(\cos x\right)' = -\sin x$ |
| 8. Производная тангенса | $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ |
| 9. Производная котангенса | $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |

| | |
|---|---|
| 10. Производная арксинуса | $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 11. Производная арккосинуса | $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 12. Производная арктангенса | $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$ |
| 13. Производная арккотангенса | $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |
| 14. Производная натурального логарифма | $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ |
| 15. Производная логарифмической функции | $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ |
| 16. Производная экспоненты | $(e^x)' = e^x$ |
| 17. Производная показательной функции | $(a^x)' = a^x \ln a$ |

**Правила дифференцирования.**

| | |
|---|---|
| 1. Производная суммы или разности | $(u \pm v)' = u' \pm v'$ |
| 2. Производная произведения | $(uv)' = u'v + v'u$ |
| 2а. Производная выражения, умноженного на постоянный множитель | $(Cu)' = Cu'$ |
| 3. Производная частного | $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ |
| 4. Производная сложной функции | $(f[g(x)])' =$ $= f'[g(x)] \bullet g'(x)$ |

**Таблица производных некоторых сложных функций.**

Для сложных функций на основании правила дифференцирования сложной функции $(f[g(x)])' = f'[g(x)] \bullet g'(x)$ формула производной простой функции принимает другой вид.

| | |
|---|---|
| 1. Производная сложной степенной функции, где $u$ – дифференцируемая функция аргумента $x$ | $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$ |
| 2. Производная корня от выражения | $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| 3. Производная показательной | $(a^u)' = a^u u' \ln a$ |

| | |
|---|---|
| функции | |
| 4. Частный случай показательной функции | $\left(e^{u}\right)' = e^{u}u'$ |
| 5. Производная логарифмической функции с произвольным положительным основанием *a* | $\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{\ln a} \bullet \frac{u'}{u}$ |
| 6. Производная сложной логарифмической функции, где *u* – дифференцируемая функция аргумента*x* | $\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$ |
| 7. Производная синуса | $\left(\sin u\right)' = \cos u \bullet u'$ |
| 8. Производная косинуса | $\left(\cos u\right)' = -\sin u \bullet u'$ |
| 9. Производная тангенса | $\left(\mathrm{tg}\ u\right) = \frac{u'}{\cos^2 u}$ |
| 10. Производная котангенса | $\left(\mathrm{ctg}\ u\right)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$ |
| 11. Производная арксинуса | $\left(\arcsin u\right)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| 12. Производная арккосинуса | $\left(\arccos u\right)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| 13. Производная арктангенса | $\left(\mathrm{arctg}\ u\right)' = \frac{u'}{1+u^2}$ |
| 14. Производная арккотангенса | $\left(\mathrm{arcctg}\ u\right)' = -\frac{u'}{1+u^2}$ |

## Тема 3.2 «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

### Лекция №15
### Определение дифференциального уравнения. Задача Коши.

**План.**

**1.Определение дифференциального уравнения.**
**2.Порядок дифференциального уравнения.**
**3.Задача Коши.**

**Определение дифференциального уравнения.**

*Обыкновенным дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию этой переменной и её производные (или дифференциалы) различных порядков.

**Порядок дифференциального уравнения и его решения**.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, содержащейся в нём.

Кроме обыкновенных изучаются также дифференциальные уравнения с частными производными, т. е. уравнения, связывающие независимые переменные $x_1,\ x_2,\dots,x_k$, неизвестную функцию этих переменных и её частные производные по тем же переменным. Но мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения и поэтому будем для краткости опускать слово "обыкновенные".

Примеры дифференциальных уравнений:

(1) $y^{(IV)}+y'-x=0$;

(2) $x^2\left(y'''\right)^4-(x-1)\left(y'\right)^5-x+3=0$;

(3) $y''+2y'-3y=x^2+1$;

(4) $y''+2y'-3y=0$;

(5) $y'-3x^2=0$.

Уравнение (1) - четвёртого порядка, уравнение (2) - третьего порядка, уравнения (3) и (4) - второго порядка, уравнение (5) - первого порядка.

Дифференциальное уравнение *n*-го порядка не обязательно должно содержать явно функцию, все её производные от первого до *n*-го порядка и независимую переменную. В нём могут не содержаться явно производные некоторых порядков, функция, независимая переменная.

Например, в уравнении (1) явно нет производных третьего и второго порядков, а также функции; в уравнении (2) - производной второго порядка и функции; в уравнении (4) - независимой переменной; в уравнении (5) - функции. Только в уравнении (3) содержатся явно все производные, функция и независимая переменная.

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, при подстановке которой в уравнение оно обращается в тождество.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется его *интегрированием*.

**Пример 1.** Найти решение дифференциального уравнения $y'-3x^2=0$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $y'=3x^2$. Решение состоит в нахождении функции по её производной. Искомая функция, как известно из интегрального исчисления, есть первообразная для $3x^2$, т. е.

$y=x^3+C$.

Это и есть решение данного дифференциального уравнения. Меняя в нём *C*, будем получать различные решения. Таким образом, имеется бесконечное множество решений дифференциального уравнения первого порядка.

*Общим решением* дифференциального уравнения *n*-го порядка называется его решение, выраженное явно относительно неизвестной функции и содержащее *n*независимых произвольных постоянных, т. е.

$$y=\varphi\left(x,\ \ C_1,\ \ C_2,\dots,C_n\right).$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения в примере 1 является общим.

*Частным решением* дифференциального уравнения называется такое его решение, в котором произвольным постоянным придаются конкретные числовые значения.

**Пример 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'''=2$ и частное решение при $C_1=2,\ \ C_2=7,\ \ C_3=4$.

Решение. Проинтегрируем обе части уравнения такое число раз, которому равен порядок дифференциального уравнения.

$$y''=\int 2dx=2x+C_1,$$

$$y'=\int\left(2x+C_1\right)dx=\frac{2x^2}{2}+C_1x+C_2=x^2+C_1x+C_2,$$

$$y=\int\left(x^2+C_1x+C_2\right)dx=$$
$$=\frac{x^3}{3}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

Таким образом, получили общее решение -

$$y=\frac{x^3}{3}+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$$

данного дифференциального уравнения третьего порядка.

Теперь найдём частное решение при указанных условиях. Для этого подставим вместо произвольных коэффициентов их значения и получим

$$y=\frac{x^3}{3}+x^2+7x+4.$$

**Задача Коши.**

Если кроме дифференциального уравнения задано начальное условие в виде $y\left(x_0\right)=y_0$, то такая задача называется ***задачей Коши***. В общее решение уравнения подставляют значения $y_0$ и $x_0$ и находят значение произвольной постоянной *C*, а затем частное решение уравнения при найденном значении *C*. Это и есть решение задачи Коши.

**Пример 3.** Решить задачу Коши для дифференциального уравнения из примера 1 при условии $y(1)=3$.

Решение. Подставим в общее решение $y = x^3 + C$ значения из начального условия *y*= 3, *x* = 1. Получаем

$$3 = 1 + C$$
$$C = 2.$$

Записываем решение задачи Коши для данного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y = x^3 + 2.$$

При решении дифференциальных уравнений, даже самых простых, требуются хорошие навыки интегрирования и взятия производных, в том числе сложных функций. Это видно на следующем примере.

**Пример 4.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Уравнение записано в такой форме, что можно сразу же интегрировать обе его части.

$$y = \int -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Применяем метод интегрирования заменой переменной (подстановкой). Пусть $1 - x^2 = t$, тогда $x = \sqrt{1-t}$.

Требуется взять *dx* и теперь - внимание - делаем это по правилам дифференцирования сложной функции, так как *x* и есть сложная функция:

$$dx = \left(\left(1-t\right)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-t\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-t\right)' = \frac{1}{2}\left(1-t\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-1\right)dt.$$

Находим интеграл:

$$y=-\int(1-t)^{\frac{1}{2}}\bullet t^{-\frac{1}{2}}\bullet\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\bullet(-1)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=t^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{t}+C.$$

Возвращаясь к переменной *x*, получаем:

$$y=\sqrt{1-x^2}+C.$$

Это и есть общее решение данного дифференциального уравнения первой степени.

Не только навыки из предыдущих разделов высшей математики потребуются в решении дифференциальных уравнений, но и навыки из элементарной, то есть школьной математики. Как уже говорилось, в дифференциальном уравнении любого порядка может и не быть независимой переменной, то есть, переменной *x*. Помогут решить эту проблему не забытые (впрочем, у кого как) со школьной скамьи знания о пропорции. Таков следующий пример.

**Пример 5.** Найти общее решение дифференциального уравнения $y'=3y^2$.

Решение. Как видим, переменная *x* в уравнении отсутствует. Вспоминаем из курсадифференциального исчисления, что производная может быть записана также в виде $\frac{dy}{dx}$. Таким образом, уравнение приобретает вид

$$\frac{dy}{dx}=3y^2,$$

то есть, в нём в некотором виде появился *x*.

Теперь вспомним одно из свойств пропорции: из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ вытекают следующие пропорции:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d},\ \ \frac{d}{b}=\frac{c}{a},\ \ \frac{d}{c}=\frac{b}{a},$$

то есть в пропорции можно менять местами крайние и средние члены или те и другие одновременно.

Применяя это свойство, преобразуем уравнение к виду

$$\frac{dy}{y^2}=3dx,$$

после чего интегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{y^2} = 3\int dx$$
.

Оба интеграла - табличные, находим их:

$$-\frac{1}{y} + C = 3x + C$$

и получаем решение данного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y = -\frac{1}{3x} + C$$
.

**Лекция №16**
**Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.**
**План.**

**1.Дифференциальные уравнения, в которых переменные уже разделены.**
**2.Дифференциальные уравнения, в которых требуется разделить переменные.**

**Дифференциальные уравнения, в которых переменные уже разделены.**

Дифференциальные уравнения, в которых выражение, зависящее от $y$, входит только в левую часть, а выражение, зависящее от $x$ - только в правую часть, это дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, в которых переменные уже разделены.

В левой части уравнения может находиться производная от игрека и в этом случае решением дифференциального уравнения будет функция игрек, выраженная через значение интеграла от правой части уравнения. Пример такого уравнения - $y' = x + \sin x$ .

В левой части уравнения может быть и дифференциал функции от игрека и тогда для получения решения уравнения следует проинтегрировать обе части уравнения. Пример такого уравнения - $9ydy = \frac{dx}{\cos^2 x}$ .

**Пример 1.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = x + \sin x$$

Решение. Пример очень простой. Непосредственно находим функцию по её производной, интегрируя:

$$y = \int (x + \sin x)dx = \int xdx + \int \sin xdx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \cos x + C.$$

Таким образом, получили функцию - решение данного уравнения.

**Пример 2.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$9ydy = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Решение. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int 9ydy = \int \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Оба интеграла - табличные. Идём к решению:

$$\frac{9}{2}y^2 + C_1 = \mathrm{tg}x + C_2$$

$$y^2 = \frac{2}{9}\mathrm{tg}x + C$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\mathrm{tg}x + C}.$$

Функция - решение уравнения - получена. Как видим, нужно только уверенно знать табличные интегралы и неплохо расправляться с дробями и корнями.

**Дифференциальные уравнения, в которых требуется разделить переменные.**

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, в которых требуется разделить переменные, имеют вид

$$f_1(x) \bullet \varphi_2(y)dx + f_2(x) \bullet \varphi_2(y)dy = 0.$$

В таком уравнении $f_1(x)$ и $f_2(x)$ - функции только переменной *x*, а $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ - функции только переменной *y*.

Поделив члены уравнения на произведение $\varphi_2(y) \bullet f_2(x)$, после сокращения получим

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = -\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy.$$

Как видим, левая часть уравнения зависит только от *x*, а правая только от *y*, то есть переменные разделены.

Левая часть полученного уравнения - дифференциал некоторой функции переменной *x*, а правая часть - дифференциал некоторой функции переменной *y*. Для получения решения исходного дифференциального уравнения следует интегрировать обе части уравнения. При этом при разделении переменных не обязательно переносить один его член в правую часть, можно почленно интегрировать без такого переноса.

**Пример 3.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решение. Для разделения переменных поделим уравнение почленно на произведение $\sqrt{1-y^2} \bullet \sqrt{1-x^2}$ и получим

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = 0$$
.

Почленно интегрируем:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = C$$
,

откуда, используя метод замены переменной (подстановки), получаем

$-\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = C_1$ или $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$,

поскольку левая часть равенства есть сумма арифметических значений корней. Таким образом, получили общий интеграл данного уравнения. Выразим из него $y$ и найдём общее решение уравнения:

$$y = \pm\sqrt{1-\left(C - \sqrt{1-x^2}\right)^2}$$
.

Есть задачи, в которых для разделения переменных уравнение нужно не делить почленно на произведение некоторых функций, а почленно умножать. Таков следующий пример.

**Пример 4.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$e^{x-y}dx - \frac{1}{x}dy = 0$$
.

Решение. Бывает, что забвение элементарной (школьной) математики мешает даже близко подойти к началу решения, задача выглядит абсолютно тупиковой. В нашем примере для начала всего-то нужно вспомнить свойства степеней.

Так как $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$, то перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{e^x}{e^y}dx - \frac{1}{x}dy = 0$$
.

Это уже уравнение с разделяющимися переменными. Умножив его почленно на произведение $xe^y$, получаем

$$xe^x dx - e^y dy = 0$$.

Почленно интегрируем:

$$\int xe^x dx - \int e^y dy = C$$
$$xe^x - e^x - e^y = C.$$

Первый интеграл находим интегрированием по частям, а второй - табличный. Следовательно,

$$e^y = xe^x - e^x - C.$$

Логарифимруя обе части равенства, получаем общее решение уравнения:

$$y = \ln\left(xe^x - e^x - C\right).$$

**Пример 5.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'e^{-x} = x - 1.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решение. Для разделения переменных поделим уравнение почленно на $e^{-x}$ и получим

$$y = \int \frac{x-1}{e^{-x}} dx = \int e^x \left(x-1\right) dx.$$

Чтобы найти *y*, требуется найти интеграл. Интегрируем по частям.

Пусть $u = x - 1$, $dv = e^x$.

Тогда $du = dx$, $v = e^x$.

Находим общее решение уравнения:

$$y = \left(x-1\right)e^x - \int e^x dx =$$
$$= \left(x-1\right)e^x - e^x + C =$$
$$= e^x\left(x-1-1\right) + C =$$
$$= e^x\left(x-2\right) + C.$$

**Пример 6.** Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'\sin x - y\cos x = 0,$$

удовлетворяющее условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решение. Для разделения переменных поделим уравнение почленно на $\sin x$ и получим

$$y' - y\frac{\cos x}{\sin x} = 0$$

или

$$y' - y \operatorname{ctg} x = 0.$$

Записываем производную *y* в виде $\frac{dy}{dx}$ и получаем

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y \operatorname{ctg} x.$$

Разделяем *dy* и *dx* и получаем уравнение:

$$\frac{dy}{y} = \operatorname{ctg} x \, dx$$

, которое почленно интегрируя:

$$\ln|y| = \ln|\sin x|,$$

находим общее решение уравнения:

$$y = \sin x + C.$$

Чтобы найти частное решение уравнения, подставляем в общее решение значения*y* и *x* из начального условия:

$$1 = \sin\frac{\pi}{2} + C$$

$$1 = 1 + 0$$

$$C = 0.$$

Таким образом, частное решение данного дифференциального уравнения:

$$y = \sin x.$$

В некоторых случаях ответ (функцию) можно выразить явно. Для этого следует воспользоваться тем свойством логарифма, что сумма логарифмов равна логарифму произведения логарифмируемых выражений. Обычно это следует делать в тех случаях, когда слева искомая функция под логарифмом находится вместе с каким-нибудь слагаемым. Рассмотрим два таких примера.

**Пример 7.** Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y+1}{x-1}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решение. Для разделения переменных запишем производную "игрека" в виде $\frac{dy}{dx}$ и получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x-1}.$$

Разделяем "игреки" и "иксы":

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x-1}.$$

Почленно интегрируем и, так как в левой части "игрек" присутствует со слагаемым, в правой части константу интегрирования записываем также под знаком логарифма:

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x-1}$$

$$\ln|y+1| = \ln|x-1| + \ln|C|.$$

Теперь по свойству логарифма $\ln|x-1| + \ln|C| = \ln(|x-1||C|)$ имеем

$$y+1 = (x-1)C.$$

Находим общее решение уравнения:

$$y = C(x-1) - 1$$

**Пример 8.** Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'\operatorname{ctg} x + y = 2,$$

удовлетворяющее условию $y(0) = -1$.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решение. Для разделения переменных поделим уравнение почленно на $\operatorname{ctg} x$ и получим

$$y' + \frac{y}{\operatorname{ctg} x} = \frac{2}{\operatorname{ctg} x}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-y}{\operatorname{ctg} x}.$$

Разделяем *dy* и *dx* и получаем уравнение:

$$\frac{dy}{2-y} = \frac{dx}{\operatorname{ctg} x}$$

$$\frac{dy}{2-y} = \operatorname{tg} x\, dx,$$

которое почленно интегрируя:

$$\ln|2-y| = -\ln|\cos x| + \ln|C|$$
$$\ln|2-y| = -\ln|\cos x \bullet C|$$
$$2-y = -\cos x \bullet C,$$

находим общее решение уравнения:

$$y = \cos x \bullet C + 2.$$

Чтобы найти частное решение уравнения, подставляем в общее решение значения *y* и *x* из начального условия:

$$-1 = \cos(0) \bullet C + 2$$
$$-1 = 1 \bullet C + 2$$
$$C = -1 - 2 = -3.$$

Таким образом частное решение данного дифференциального уравнения:

$$y = 2 - 3\cos x.$$

**Лекция №17**

**Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.**

**План.**

**1.Определение линейного дифференциального уравнения первого порядка.**
**2.Как решать линейные дифференциальные уравнения первого порядка.**

## Определение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Дифференциальное уравнение называется линейным, если в нём функция и все её производные содержатся только в первой степени, отсутствуют и их произведения.

Общий вид линейного дифференциального уравнения первого порядка таков:

$$y' + a_1(x)y = f(x),$$

где $a_1(x)$ и $f(x)$ - непрерывные функции от *x*.

## Как решать линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Интегрирование такого уравнения можно свести к интегрированию двух двух дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными. Великие математики доказали, что искомую функцию, то есть решение уравнения, можно представить в виде произведения двух неизвестных функций *u*(*x*) и *v*(*x*). Пусть *y* = *uv*, тогда по правилу дифференцирования произведения функций

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

и линейное дифференциальное уравнения первого порядка примет вид

$$\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}+a_1(x)uv=f(x)$$

или

$$v\frac{du}{dx}+u\left[\frac{dv}{dx}+a_1(x)v\right]=f(x)\ . \quad (*)$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы в этом уравнении выражение в скобках обратилось в нуль:

$$\frac{dv}{dx}+a_1(x)v=0\ ,$$

то есть в качестве функции $v$ берётся одно из частных решений этого уравнения с разделяющимися переменными, отличное от нуля. Разделяя в уравнении $\frac{dv}{dx}+a_1(x)v=0$ переменные и выполняя затем его почленное интегрирование, найдём функцию $v$. Так как функция $v$ - решение уравнения, то её подстановка в уравнение $v\frac{du}{dx}+u\left[\frac{dv}{dx}+a_1(x)v\right]=f(x)$ даёт

$$v\frac{du}{dx}=f(x)\ .$$

Таким образом, для нахождения функции $u$ получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Найдём функцию $u$ как общее решение этого уравнения.

Теперь можем найти решение исходного линейного дифференциального уравнения первого порядка. Оно равно произведению функций $u$ и $v$, т. е. $y = uv$. $u$ и $v$ уже нашли.

**Пример 1.** Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'-\frac{y}{x}=\frac{x+1}{x}\ .$$

Решение. Как было показано в алгоритме, $y = uv$. Подставляя выражения для $\frac{dy}{dx}$ и $y$в уравнение вида (*), получим

$$v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v\right)=\frac{x+1}{x} \quad (**).$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v=0 \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dx}=\frac{v}{x}\ .$$

После разделения переменных это уравнение принимает вид

$$\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}.$$

Почленное интегрирование даёт

$$\ln|v|=\ln|x|$$
$$v=x.$$

Подставив найденное значение функции $v$ в равенство (* *), получим

$$x\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции $u$. Разделяем переменные:

$$du=\frac{x+1}{x^2}dx$$

и, интегрируя находим $u$:

$$u=\int\frac{x+1}{x^2}dx=\int\frac{x}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^2}dx=$$
$$=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x^2}dx=\ln x-\frac{1}{x}+C.$$

Теперь можно записать общее решение данного линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y=\left(\ln x-\frac{1}{x}+C\right)x=$$
$$=x\ln x-1+Cx.$$

**Пример 2.** Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'-\frac{2x}{x^2+1}y=x\sqrt{x^2+1}.$$

Решение. Подставляя выражения для $\frac{dy}{dx}$ и $y$ в уравнение вида (*), получим

$$v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}v\right)=x\sqrt{x^2+1} \quad (* *).$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}v=0.$$

После разделения переменных это уравнение принимает вид

$$\frac{dv}{v}=\frac{2x}{x^2+1}dx$$.

Почленное интегрирование даёт

$$\ln|v|=\ln\left(x^2+1\right)$$
$$v=x^2+1$$

Подставив найденное значение функции *v* в равенство (* *), получим

$$\left(x^2+1\right)\frac{du}{dx}=x\sqrt{x^2+1}$$.

Это уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции *u*. Разделяем переменные:

$$du=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

и, интегрируя находим *u*:

$$u=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}+C$$

Теперь можно записать общее решение данного линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y=\left(\sqrt{x^2+1}+C\right)\left(x^2+1\right)=$$
$$=\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+C\left(x^2+1\right).$$

**Пример 3.** Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'-2y=e^{2x}$$.

Решение. Подставляя выражения для $\frac{dy}{dx}$ и *y* в уравнение вида (*), получим

$$v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}-2v\right)=e^{2x}$$ (* *).

Выберем функцию *v*(*x*) так, чтобы выполнялось равенство

$\frac{dv}{dx}-2v=0$ или $\frac{dv}{dx}=2v$.

После разделения переменных это уравнение принимает вид

$$\frac{dv}{2v} = dx$$.

Почленное интегрирование даёт

$$\frac{1}{2}\ln v = x$$

$$\ln v = 2x$$

$$v = e^{2x}.$$

Подставив найденное значение функции *v* в равенство (* *), получим

$$e^{2x}\frac{du}{dx} = e^{2x}$$.

Это уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции *u*. Разделяем переменные и, интегрируя, находим *u*:

$$du = \frac{e^{2x}}{e^{2x}}dx$$

$$du = dx$$

$$u = x + C.$$

Записываем общее решение данного линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y = (x + C)e^{2x} =$$

$$= xe^{2x} + Ce^{2x}.$$

**Пример 4.** Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$xy' + y = \ln x + 1$$.

Решение. В этом случае сначала нужно добиться, чтобы производная "игрека" ни на что не умножалась. Для этого поделим уравнение почленно на "икс" и получим

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$$.

Подставляя выражения для $\frac{dy}{dx}$ и *y* в уравнение вида (*), получим

$$v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v\right) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}$$ (* *).

Выберем функцию *v*(*x*) так, чтобы выполнялось равенство

$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = 0$ или $\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$.

После разделения переменных это уравнение принимает вид

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}.$$

Почленное интегрирование даёт

$$\ln|v| = \ln|-x|$$
$$v = x$$

Подставив найденное значение функции $v$ в равенство (* *), получим

$$x\frac{du}{dx} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции $u$. Разделяем переменные и, интегрируем по частям.

$$du = \frac{\ln x + 1}{x^2}dx$$
$$u = \int (\ln x + 1)\frac{1}{x^2}dx.$$

В интеграле $u_2 = \ln x + 1$, $dv_2 = \frac{1}{x^2}dx$.

Тогда $du_2 = \frac{1}{x}dx, \quad v_2 = -\frac{1}{x} + C$.

Интегрируем и находим $u$:

$$u = \left(\frac{\ln x + 1}{x} - \int\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}dx\right) =$$
$$= \left(\frac{\ln x + 1}{x} + \int\frac{1}{x^2}dx\right) =$$
$$= \left(\frac{\ln x + 1}{x} - \frac{1}{x} + C\right) = \left(\frac{\ln x + 1 - 1}{x} + C\right) =$$
$$= \frac{\ln x}{x} + C.$$

Записываем общее решение данного линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y = uv = \left(\frac{\ln x}{x} + C\right)x =$$
$$= \ln x + \frac{C}{x}.$$

**Пример 5.** Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + y\ \mathrm{tg}\ x = \frac{1}{\cos x}.$$

Решение. Подставляя выражения для $\frac{dy}{dx}$ и $y$ в уравнение вида (*), получим

$$v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} + v\ \mathrm{tg}\ x\right) = \frac{1}{\cos x} \quad (*\ *).$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{dv}{dx} + v\ \mathrm{tg}\ x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dx} = -v\ \mathrm{tg}\ x.$$

После разделения переменных это уравнение принимает вид

$$\frac{dv}{v} = -\mathrm{tg}\ x\, dx.$$

Почленное интегрирование даёт

$$\ln|v| = \ln|\cos x|$$
$$v = \cos x.$$

Подставив найденное значение функции $v$ в равенство (* *), получим

$$\cos x \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos x}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции $u$. Разделяем переменные и, интегрируя, находим $u$:

$$du = \frac{dx}{\cos^2 x}$$
$$u = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\ x + C.$$

Записываем общее решение данного линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y = (\mathrm{tg}\ x + C)\cos x =$$
$$= \sin x + C\cos x.$$

В последних двух примерах требуется найти частное решение уравнения.

**Пример 6.** Найти частное решение линейного дифференциальное уравнение первого порядка

$y'\sin x - y\cos x = 1$ при условии $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Решение. Чтобы производная "игрека" ни на что не умножалась, разделим уравнение почленно на $\sin x$ и получим

$$y' - y\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x}$$

или

$$y' - y\ \mathrm{ctg}\ x = \frac{1}{\sin x}.$$

Подставляя выражения для $\frac{dy}{dx}$ и $y$ в уравнение вида (*), получим

$$v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} - v\ \mathrm{ctg}\ x\right) = \frac{1}{\sin x} \quad (* *).$$

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{dv}{dx} - v\ \mathrm{ctg}\ x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dx} = v\ \mathrm{ctg}\ x.$$

После разделения переменных это уравнение принимает вид

$$\frac{dv}{v} = \mathrm{ctg}\ x\, dx.$$

Почленное интегрирование даёт

$$\ln|v| = \ln|\sin x|$$
$$v = \sin x.$$

Подставив найденное значение функции $v$ в равенство (* *), получим

$$\sin x\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sin x}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции $u$. Разделяем переменные и, интегрируя, находим $u$:

$$du = \frac{1}{\sin^2 x}dx$$
$$u = -\mathrm{ctg}\ x + C.$$

Записываем общее решение данного линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y = uv = \left(-\text{ctg }\ x + C\right)\sin x =$$
$$= -\frac{\cos x}{\sin x} \bullet \sin x + C\sin x =$$
$$= -\cos x + C\sin x.$$

Найдём частное решение уравнения. Для этого в общее решение подставим $x = \frac{\pi}{2}$ и $y = 0$ и найдём значение *C*:

$$0 = -\cos\frac{\pi}{2} + C\sin\frac{\pi}{2}$$
$$0 = 0 + C \bullet 1$$
$$C \bullet 1 = 0$$
$$C = 0.$$

Подставляем значение *C* и получаем частное решение данного линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y = -\cos x.$$

**Пример 7.** Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

$y' = 2y + e^x - x$ при условии $y(0) = \frac{1}{4}$.

Перенесём функцию "игрека" в левую часть и получим

$$y' - 2y = e^x - x.$$

Подставляя выражения для $\frac{dy}{dx}$ и *y* в уравнение вида (*), получим

$$v\frac{du}{dv} + u\left(\frac{dv}{dx} - 2v\right) = e^x - x \quad (**).$$

Выберем функцию *v*(*x*) так, чтобы выполнялось равенство

$\frac{dv}{dx} - 2v = 0$ или $\frac{dv}{dx} = 2v$.

После разделения переменных это уравнение принимает вид

$$\frac{1}{2}\frac{dv}{v} = dx.$$

Почленное интегрирование даёт

$$\frac{1}{2}\ln|v| = x$$
$$\ln|v| = 2x$$
$$v = e^{2x}.$$

Подставив найденное значение функции *v* в равенство (* *), получим

$$e^{2x}\frac{du}{dv} = e^{x} - x$$
.

Это уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции *u*. Разделяем переменные и, интегрируя, находим *u*:

$$u = \int \frac{e^{x}}{e^{2x}}dx - \int \frac{x}{e^{2x}} = \int e^{-x}dx - \int xe^{-2x}dx$$
.

Первый интеграл равен $-e^{-x} + C$ , второй находим интегрированием по частям.

В нём $u_2 = x$, $dv_2 = e^{-2x}dx$.

Тогда $du_2 = dx$, $v_2 = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ .

Находим второй интеграл:

$$I = x \bullet \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} - \int \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}dx =$$
$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} + C =$$
$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$$
.

Таким образом получаем функцию *u*:

$$u = e^{-x} - \left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C\right) =$$
$$= e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} - C.$$

Записываем общее решение данного линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y = uv = \left(-e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} - C\right)e^{2x} =$$
$$= -e^{x} + \frac{1}{2}xe^{0} + \frac{1}{4}e^{0} - Ce^{2x} =$$
$$= -e^{x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - Ce^{2x}.$$

Найдём частное решение уравнения. Для этого в общее решение подставим $x = 0$ и $y = \frac{1}{4}$ и найдём значение *C*:

$$\frac{1}{4} = -e^{0} + \frac{1}{2} \bullet 0 + \frac{1}{4} - Ce^{0}$$
$$\frac{1}{4} = -1 + \frac{1}{4} - C$$
$$C = -1.$$

Подставляем значение *C* и получаем частное решение данного линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y = e^{2x} - e^{x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}.$$

## Лекция №18
## Уравнение Бернулли.
## План.

**1.Уравнение Бернулли.**
**2.Примеры решения уравнений.**

**Определение уравнения Бернулли.**

Уравнение Бернулли является одним из наиболее известных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Оно записывается в виде

$$y' + a(x)y = b(x)y^{m},$$

где $a(x)$ и $b(x)$ − непрерывные функции.

Если $m = 0$, то уравнение Бернулли становится линейным дифференциальным уравнением. В случае когда $m = 1$, уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными.

В общем случае, когда $m \neq 0, 1$, уравнение Бернулли сводится к линейному дифференциальному уравнению с помощью подстановки

$$z = y^{1-m}.$$

Новое дифференциальное уравнение для функции $z(x)$ имеет вид

$$z' + (1-m)a(x)z = (1-m)b(x).$$

**Пример 1.**

Найти общее решение уравнения $y' - y = y^2 e^x$.

*Решение.*

Для заданного уравнения Бернулли $m = 2$, поэтому сделаем подстановку

$$z = y^{1-m} = \frac{1}{y}.$$

Дифференцируя обе части уравнения (переменная $y$ при этом рассматривается как сложная функция $x$), можно записать:

$$z' = \left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{1}{y^2}y'.$$

Разделим обе части исходного дифференциального уравнения на $y^2$:

$$y' - y = y^2 e^x \quad |: y^2$$

$$\frac{y'}{y} - \frac{1}{y} = e^x.$$

Подставляя $z$ и $z'$, находим:

$$-z' - z = e^x \quad \text{или} \quad z' + z = -e^x.$$

Мы получили линейное уравнение для функции $z(x)$. Решим его с помощью интегрирующего множителя:

$$u(x) = e^{\int 1dx} = e^x.$$

Общее решение линейного уравнения выражается формулой

$$z(x) = \frac{\int u(x) f(x)\,dx + C}{u(x)} = \frac{\int e^x\left(-e^x\right)dx + C}{e^x} = \frac{-x + C}{e^x} = (C - x)e^{-x}.$$

Возвращаясь к функции $y(x)$, получаем ответ в неявной форме:

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{(C - x)e^{-x}},$$

который можно записать также в виде:

$$y(C - x) = e^x.$$

Заметим, что при делении уравнения на $y^2$ мы потеряли решение $y = 0$. В результате, полный ответ записывается в виде:

$$y(C - x) = e^x, \quad y = 0.$$

**Пример 2.**

Решить дифференциальное уравнение $y' + \frac{y}{x} = y^2$.

*Решение.*

Нетрудно заметить, что данное дифференциальное уравнение является уравнением Бернулли. Чтобы решить его, выполним подстановку

$$z = y^{1-m} = \frac{1}{y}.$$

После дифференцирования получаем:

$$z' = \left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{y'}{y^2}.$$

Разделим исходное уравнение на $y^2$ и заменим $y$ на $z$:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{yx} = 1.$$

При делении на $y^2$ мы потеряли решение $y = 0$. (Это можно проверить прямой подстановкой.)

Дифференциальное уравнение для новой переменной $z$ имеет вид:

$$-z' + \frac{z}{x} = 1 \quad \text{или} \quad z' - \frac{z}{x} = -1.$$

Мы получили линейное уравнение для функции $z(x)$, которое можно решить, например, с помощью интегрирующего множителя:

$$u(x) = e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx} = e^{-\int\frac{dx}{x}} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln\frac{1}{|x|}} = \frac{1}{|x|}.$$

Легко проверить, что таким интегрирующим множителем будет являться функция $1/x$. В самом деле:

$$z'\cdot\frac{1}{x} - \frac{z}{x}\cdot\frac{1}{x} = z'\cdot\frac{1}{x} - \frac{z}{x^2} = \left(z\cdot\frac{1}{x}\right)'.$$

Видно, что левая часть уравнения после умножения на $1/x$ будет являться произведением $z(x)u(x)$

Тогда общее решение линейного дифференциального уравнения для функции $z(x)$ определяется формулой

$$z = \frac{\int u(x) f(x) dx + C}{u(x)} = \frac{\int \frac{1}{x}\cdot(-1) dx + C}{1/x} = \frac{-\ln|x| + C}{1/x} = x\left(C - \ln|x|\right).$$

Принимая во внимание, что $y = 1/z$, записываем ответ в форме:

$$y = \frac{1}{x\left(C - \ln|x|\right)},$$

или в неявном виде:

$$yx\left(C - \ln|x|\right) = 1.$$

Следовательно, окончательный ответ имеет вид:

$$yx\left(C - \ln|x|\right) = 1, \quad y = 0.$$

**Пример 3.**

Найти все решения дифференциального уравнения $y' + y\cot x = y^4 \sin x$.

*Решение.*

В этом примере мы имеем дело с уравнением Бернулли с параметром $m = 4$. Поэтому, сделаем подстановку $z = y^{1-m} = y^{-3}$. Производная будет равна

$$z' = \left(y^{-3}\right)' = -3y^{-4}y' = -\frac{3y'}{y^4}.$$

Умножим обе части исходного уравнения на $(-3)$ и разделим на $y^4$:

$$y' + y\cot x = y^4 \sin x,$$

$$\frac{-3y'}{y^4} - \frac{3\cot x}{y^3} = -3\sin x.$$

Заметим, что при делении на $y^4$ мы потеряли решение $y = 0$. Записывая последнее уравнение через переменную $z$, получаем

$$z' - 3\cot x \cdot z = -3\sin x.$$

Данное дифференциальное уравнение является линейным. Его можно решить, например, используя интегрирующий множитель:

$$u(x) = e^{\int(-3)\cot x dx} = e^{-3\int \cot x dx} = e^{-3\int \frac{\cos x dx}{\sin x}} = e^{-3\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}} = e^{-3\ln|\sin x|} = e^{\ln\frac{1}{|\sin x|^3}} = \frac{1}{|\sin x|^3}.$$

В качестве интегрирующего множителя возьмем функцию $u(x) = \frac{1}{\sin^3 x}$. После умножения на $u(x)$ левая часть уравнения будет представлять собой производную произведения $z(x)u(x)$:

$$z' \cdot \frac{1}{\sin^3 x} - 3\cot x \cdot z \cdot \frac{1}{\sin^3 x} = z'\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{3z\cos x}{\sin^4 x} = \left(z\frac{1}{\sin^3 x}\right)'.$$

Следовательно, общее решение линейного дифференциального уравнения для функции $z(x)$ представляется в виде:

$$z = \frac{\int u(x) f(x) dx + C}{u(x)} = \frac{\int \frac{1}{\sin^3 x}(-3\sin x)\,dx + C}{\frac{1}{\sin^3 x}} = \frac{-3\int \frac{dx}{\sin^2 x} + C}{\frac{1}{\sin^3 x}} = (3\cot x + C)\sin^3 x.$$

Поскольку $z = y^{-3}$, то мы получаем следующие решения исходного уравнения Бернулли:

$$\frac{1}{y^3} = (3\cot x + C)\sin^3 x, \qquad y = 0.$$

**Пример 4.**

Найти все решения дифференциального уравнения $y' + \frac{2y}{x} = 2x\sqrt{y}$.

*Решение.*

Данное уравнение является уравнением Бернулли с дробным параметром $m = 1/2$. Его можно свести к линейному дифференциальному уравнению с помощью замены $z = y^{1-m} = \sqrt{y}$.

Производная новой функции $z(x)$ будет равна

$$z' = \left(\sqrt{y}\right)' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}.$$

Разделим исходное уравнение Бернулли на $2\sqrt{y}$. Аналогично другим примерам корень $y = 0$ также является тривиальным решением дифференциального уравнения. Поэтому можно записать:

$$y' + \frac{2y}{x} = 2x\sqrt{y} \quad |: 2\sqrt{y}$$

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} + \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}x\sqrt{y}} = \frac{\cancel{2}x\sqrt{y}}{\cancel{2}\sqrt{y}},$$

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x} = x.$$

Заменяя $y$ на $z$, находим:

$$z' + \frac{z}{x} = x.$$

Итак, мы имеем линейное уравнение для функции $z(x)$. Интегрирующий множитель здесь будет равен

$$u(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = |x|.$$

Выберем в качестве интегрирующего множителя функцию $u(x) = x$. Можно проверить, что после умножения на $u(x)$ левая часть уравнения будет представлять собой производную произведения $z(x)u(x)$:

$$z' \cdot x + \frac{z}{x} \cdot x = z'x + z = (zx)'.$$

Тогда общее решение линейного дифференциального уравнения будет определяться выражением:

$$z = \frac{\int u(x) f(x) dx + C}{u(x)} = \frac{\int x' x dx + C}{x} = \frac{\int x^2 dx + C}{x} = \frac{\frac{x^3}{3} + C}{x}.$$

Возвращаясь к исходной функции $y(x)$, записываем решение в неявной форме:

$$\sqrt{y} = \frac{\frac{x^3}{3} + C}{x} \quad \text{или} \quad x\sqrt{y} = \frac{x^3}{3} + C.$$

Итак, полный ответ имеет вид:

$$x\sqrt{y} = \frac{x^3}{3} + C, \qquad y = 0.$$

**Пример 5.**

Найти решение дифференциального уравнения $4xyy' = y^2 + x^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$.

*Решение.*

Сначала мы проверим, что заданное дифференциальное уравнение является уравнением Бернулли:

$$4xyy' = y^2 + x^2 \quad |: 4xy$$

$$\frac{4xyy'}{4xy} - \frac{y^2}{4xy} = \frac{x^2}{4xy},$$

$$y' - \frac{y}{4x} = \frac{x}{4y}.$$

Как видно, мы имеем уравнение Бернулли с параметром $m = -1$. Следовательно, можно сделать замену $z = y^{1-m} = y^2$. Производная будет равна: $z' = 2yy'$. Далее, умножим обе части дифференциального уравнения на $2y$:

$$2yy' - \frac{2y^2}{4x} = \frac{2xy}{4y}, \quad \text{или} \quad 2yy' - \frac{y^2}{2x} = \frac{x}{2}.$$

Заменяя $y$ на $z$, преобразуем уравнение Бернулли в линейное дифференциальное уравнение:

$$z' - \frac{z}{2x} = \frac{x}{2}.$$

Вычислим интегрирующий множитель:

$$u(x) = e^{\int\left(-\frac{1}{2x}\right)dx} = e^{-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}} = e^{-\frac{1}{2}\ln|x|} = e^{\ln\frac{1}{|x|^2}} = \frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Найдем общее решение линейного уравнения:

$$z = \frac{\int u(x)f(x)dx + C}{u(x)} = \frac{\int\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{2}dx + C}{1/x^2} = \frac{\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x} + C}{1/x^2} = x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right) = x^2\ln\sqrt{x} + Cx^2.$$

Учитывая, что $z = y^2$, решение можно записать в виде:

$$y = \pm\sqrt{x^2\ln\sqrt{x} + Cx^2} = \pm x\sqrt{\ln\sqrt{x} + C}.$$

Теперь определим константу $C$, соответствующую начальному условию $y(1) = 2$.
Видно, что только решение с положительным знаком удовлетворяет данному условию.
Следовательно,

$$y(1) = 1\sqrt{\ln\sqrt{1} + C} = \sqrt{\ln 1 + C} = \sqrt{0 + C} = \sqrt{C} = 2.$$

В результате получаем: $C = 4$.

Итак, решение задачи Коши выражается функцией

$$y = x\sqrt{\ln\sqrt{x} + 4}.$$

## Лекция №19
## Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
### План.

**1.Определение однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.**

**2.Корни характеристического уравнения.**

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где $p, q$ − постоянные коэффициенты.

Для каждого такого дифференциального уравнения можно записать так называемое характеристическое уравнение:

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Обшее решение однородного дифференциального уравнения зависит от корней характеристического уравнения, которое в данном случае будет являться квадратным уравнением. Возможны следующие случаи:

1. Дискриминант характеристического квадратного уравнения положителен: $D > 0$. Тогда корни характеристического уравнения $k_1$ и $k_2$ действительны и различны. В этом случае общее решение описывается функцией

   $$y(x) = C_1 \exp(k_1 x) + C_2 \exp(k_2 x),$$

   где $C_1$ и $C_2$ − произвольные действительные числа.

2. Дискриминант характеристического квадратного уравнения равен нулю: $D = 0$. Тогда корни действительны и равны. В этом случае говорят, что существует один корень $k_1$ второго порядка. Общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид:

   $$y(x) = (C_1 x + C_2)\exp(k_1 x).$$

3. Дискриминант характеристического квадратного уравнения отрицателен: $D < 0$. Такое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_1 = \alpha - \beta i$. Общее решение записывается в виде

   $$y(x) = \exp(\alpha x)\left[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right].$$

   Рассмотренные три случая удобно представить в виде таблицы:

| Общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами | | |
|---|---|---|
| **Корни характеристического уравнения** | **Дискриминант характеристического уравнения** | **Общее решение** |
| Корни $k_1$, $k_2$ действительные и различные | $D > 0$ | $y(x)=C_1\exp(k_1x) + C_2\exp(k_2x)$ |
| Корни $k_1$, $k_2$ действительные и равные | $D = 0$ | $y(x)=(C_1x + C_2)\exp(k_1x)$ |
| Корни $k_1$, $k_2$ комплексные: $k_1 =\alpha+\beta i$, $k_2=\alpha-\beta i$ | $D < 0$ | $y(x)= \exp(\alpha x)$ $[(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]$ |

**Пример 1**

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 6y' + 5y = 0$.

*Решение.*

Запишем сначала соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^2 - 6k + 5 = 0.$$

Корни данного уравнения равны $k_1 = 1$, $k_2 = 5$. Поскольку корни действительны и различны, общее решение будет иметь вид:

$$y(x) = C_1 \exp x + C_2 \exp(5x),$$

где $C_1$ и $C_2$ − произвольные постоянные.

**Пример 2.**

Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$.

*Решение.*

Вычислим корни характеристического уравнения:

$$k^2 - 6k + 9 = 0, \quad \Rightarrow D = 36 - 4 \cdot 9 = 0, \quad \Rightarrow k_{1,2} = 3.$$

Как видно, характеристическое уравнение имеет один корень второго порядка: $k_1 = 3$. Поэтому общее решение дифференциального уравнения определяется формулой

$$y(x) = (C_1 x + C_2) \exp(3x),$$

где $C_1$, $C_2$ − произвольные действительные числа.

**Пример 3.**

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 4y' + 5y = 0$.

*Решение.*

Сначала запишем соответствующее характеристическое уравнение и определим его корни:

$$k^2 - 4k + 5 = 0, \quad \Rightarrow D = 16 - 4 \cdot 5 = -4, \quad \Rightarrow k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет пару комплексно-сопряженных корней: $k_1 = 2 + i, k_2 = 2 - i$. В этом случае общее решение выражается формулой

$$y(x) = \exp(2x)[C_1 \cos x + C_2 \sin x],$$

где $C_1$, $C_2$ − произвольные постоянные.

**Пример 4.**

Решить уравнение $y'' + 25y = 0$.

*Решение.*

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 + 25 = 0.$$

Корни этого уравнения являются чисто мнимыми:

$$k^2 = -25, \quad \Rightarrow \ k_1 = 5i, \quad \Rightarrow \ k_2 = -5i.$$

Тогда ответ записывается в следующем виде:

$$y(x) = C_1 \cos(5x) + C_2 \sin(5x),$$

где $C_1$, $C_2$ − постоянные интегрирования.

**Пример 5**.
Решить уравнение $y'' + 4iy = 0$.
*Решение.*
В данном уравнении коэффициент перед $y$ является комплексным числом. Общее решение линейного дифференциального уравнения с постоянными комплексными коэффициентами конструируется так же, как и в случае действительных коэффициентов. Сначала запишем характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4i = 0.$$

Определим корни уравнения:

$$k^2 = -4i, \quad \Rightarrow \ k_{1,2} = \pm\sqrt{-4i} = \pm\sqrt{-1}\sqrt{4}\sqrt{i} = \pm 2i\sqrt{i}.$$

Вычислим отдельно квадратный корень из мнимой единицы. Для этого число $i$ удобно представить в тригонометрической форме:

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\Rightarrow \ \sqrt{i} = \sqrt{\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Корни характеристического уравнения будут равны:

$$k_{1,2} = \pm 2i\sqrt{i} = \pm 2i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\left(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right) \quad \text{или} \quad k_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \quad k_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i.$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения будет выражаться линейной комбинацией следующих экспоненциальных функций:

$$y(x) = C_1 \exp\left[\left(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)x\right] + C_2 \exp\left[\left(\sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)x\right],$$

где $C_1$, $C_2$ − произвольные постоянные.

**Лекция №20**
**Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.**
**План.**

1. **Структура общего решения.**
2. **Метод вариации постоянных.**
3. **Метод неопределенных коэффициентов.**
4. **Принцип суперпозиции.**

**Структура общего решения.**

Линейное неоднородное уравнение данного типа имеет вид:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

где $p$, $q$ − постоянные числа (которые могут быть как действительными, так и комплексными). Для каждого такого уравнения можно записать соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + py' + qy = 0.$$

**Теорема:** Общее решение неоднородного уравнения является суммой общего решения $y_0(x)$ соответствуюшего однородного уравнения и частного решения $y_1(x)$ неоднородного уравнения:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x).$$

Ниже мы рассмотрим два способа решения неоднородных дифференциальных уравнений.

**Метод вариации постоянных.**

Если общее решение $y_0$ ассоциированного однородного уравнения известно, то общее решение неоднородного уравнения можно найти, используя метод вариации постоянных.

Пусть общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид:

$$y_0(x) = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x).$$

Вместо постоянных $C_1$ и $C_2$ будем рассматривать вспомогательные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Будем искать эти функции такими, чтобы решение

$$y = C_1(x) Y_1(x) + C_2(x) Y_2(x)$$

удовлетворяло неоднородному уравнению с правой частью $f(x)$.

Неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы двух уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) Y_1(x) + C_2'(x) Y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) Y_1'(x) + C_2'(x) Y_2'(x) = f(x) \end{cases}.$$

**Метод неопределенных коэффициентов.**

Правая часть $f(x)$ неоднородного дифференциального уравнения часто представляет собой многочлен, экспоненциальную или тригонометрическую функцию, или некоторую комбинацию указанных функций. В этом случае решение удобнее искать с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Подчеркнем, что данный метод работает лишь для ограниченного класса функций в правой части, таких как

1. $f(x) = P_n(x)\exp(\alpha x);$

2. $f(x) = \left[P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\right]\exp(\alpha x),$

   где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ − многочлены степени $n$ и $m$, соответственно.

В обоих случаях выбор частного решения должен соответствовать структуре правой части неоднородного дифференциального уравнения.

В случае 1, если число $\alpha$ в экспоненциальной функции совпадает с корнем характеристического уравнения, то частное решение будет содержать дополнительный множитель $x^s$, где $s$ − кратность корня $\alpha$ в характеристическом уравнении.

В случае 2, если число $\alpha + \beta i$ совпадает с корнем характеристического уравнения, то выражение для частного решения будет содержать дополнительный множитель $x$.

Неизвестные коэффициенты можно определить подстановкой найденного выражения для частного решения в исходное неоднородное дифференциальное уравнение.

**Принцип суперпозиции**

Если правая часть неоднородного уравнения представляет собой сумму нескольких функций вида

$$P_n(x)\exp(\alpha x) \quad \text{и/или} \quad \left[P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\right]\exp(\alpha x),$$

то частное решение дифференциального уравнения также будет являться суммой частных решений, построенных отдельно для каждого слагаемого в правой части.

**Пример 1**

Решить дифференциальное уравнение $y'' + y = \sin(2x)$.

*Решение.*

Сначала мы решим соответствующее однородное уравнение $y'' + y = 0$. В данном случае корни характеристического уравнения являтся чисто мнимыми:

$$k^2 + 1 = 0, \quad \Rightarrow k^2 = -1, \quad \Rightarrow k_{1,2} = \pm i.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения определяется выражением

$$y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Вернемся снова к неоднородному уравнению. Будем искать его решение в виде

$$y(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

используя метод вариации постояных.

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ можно найти из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ C_1'(x)(\cos x)' + C_2'(x)(\sin x)' = \sin(2x) \end{cases}.$$

Тогда

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x = \sin(2x) \end{cases}.$$

Выразим производную $C_1'(x)$ из первого уравнения:

$$C_1'(x) = -C_2'(x) \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Подставляя во второе уравнение, находим производную $C_2'(x)$:

$$\left(-C_2'(x) \frac{\sin x}{\cos x}\right)(-\sin x) + C_2'(x) \cos x = \sin(2x),$$

$$C_2'(x)\left(\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x\right) = \sin(2x),$$

$$C_2'(x) \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \sin(2x),$$

$$C_2'(x) \frac{1}{\cos x} = \sin(2x),$$

$$C_2'(x) = \sin(2x) \cos x.$$

Отсюда следует, что

$$C_1'(x) = -\sin(2x)\cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = -\sin(2x)\sin x.$$

Интегрируя выражения для производных $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, получаем:

$$C_1(x) = \int\left[-\sin(2x)\sin x\right]dx = -2\int \sin^2 x\cos x\,dx = -2\int \sin^2 x\,d(\sin x) = -2\cdot\frac{\sin^3 x}{3} = -\frac{2}{3}\sin^3 x + A_1,$$

$$C_2(x) = \int\left[\sin(2x)\cos x\right]dx = 2\int \sin x\cos^2 x\,dx = -2\int \cos^2 x\,d(\cos x) = -2\cdot\frac{\cos^3 x}{3} = -\frac{2}{3}\cos^3 x + A_2.$$

где $A_1$, $A_2$ − постоянные интегрирования.

Теперь подставим найденные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу для $y_1(x)$ и запишем общее решение неоднородного уравнения:

$$y(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x = \left[-\frac{2}{3}\sin^3 x + A_1\right]\cos x + \left[-\frac{2}{3}\cos^3 x + A_2\right]\sin x$$

$$= A_1\cos x + A_2\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x\sin x = A_1\cos x + A_2\sin x - \frac{2}{3}\sin x\cos x\left(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}\right)$$

$$= A_1\cos x + A_2\sin x - \frac{1}{3}\cdot 2\sin x\cos x = A_1\cos x + A_2\sin x - \frac{1}{3}\sin(2x).$$

**Пример 2**

Найти общее решение уравнения $y'' + y' - 6y = 36x$.

*Решение.*

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Правая часть заданного уравнения представляет собой линейную функцию $f(x) = ax + b$. Поэтому будем искать частное решение в виде

$$y_1 = Ax + B.$$

Производные равны:

$$y_1' = A, \quad y_1'' = 0.$$

Подставляя это в дифференциальное уравнение, получаем:

$$0 + A - 6(Ax + B) = 36x,$$

$$A - 6Ax - 6B = 36x.$$

Последнее уравнение является тождеством, то есть справедливо для всех $x$, поэтому приравняем коэффициенты при слагаемых с одинаковыми степенями $x$ в левой и правой части:

$$\begin{cases} -6A = 36 \\ A - 6B = 0 \end{cases}.$$

Из полученной системы находим: $A = -6$, $B = -1$. В результате, частное решение записывается в виде

$$y_1 = -6x - 1.$$

Теперь найдем общее решение однородного дифференциального уравнения. Вычислим корни вспомогательного характеристического уравнения:

$$k^2 + k - 6 = 0, \quad D = 1 - 4\cdot(-6) = 25, \quad k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = -3, 2.$$

Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$$y_0(x) = C_1 \exp(-3x) + C_2 \exp(2x).$$

Итак, общее решение исходного неоднородного уравнения выражается формулой

$$y = y_0 + y_1 = C_1 \exp(-3x) + C_2 \exp(2x) - 6x - 1.$$

**Пример 3**

Решить дифференциальное уравнение $y'' - 5y' + 4y = \exp(4x)$.

*Решение.*

Сначала решим соответствующее однородное уравнение $y'' - 5y' + 4y = 0$. Корни характеристического уравнения равны:

$$k^2 - 5k + 4 = 0, \quad D = 25 - 4\cdot 4 = 9, \quad k_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = 4, 1.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения записывается как

$$y_0(x) = C_1 \exp(4x) + C_2 \exp(x),$$

где $C_1$, $C_2$ − постоянные числа.

Найдем теперь частное решение неоднородного дифференциального уравнения. Заметим, что показатель экспоненциальной функции в правой части совпадает с корнем $k_1 = 4$ характеристического уравнения. Поэтому будем искать частное решение в виде

$$y_1 = Ax\exp(4x).$$

Производные равны:

$$y_1' = \left[Ax\exp(4x)\right]' = A\exp(4x) + 4Ax\exp(4x) = (A + 4Ax)\exp(4x).$$

$$y_1'' = \left[(A + 4Ax)\exp(4x)\right]'' = 4A\exp(4x) + (4A + 16Ax)\exp(4x) = (8A + 16Ax)\exp(4x).$$

Подставляя функцию $y_1$ и ее производные в дифференциальное уравнение, получаем:

$$(8A+16Ax)\exp(4x)-5(A+4Ax)\exp(4x)+4Ax\exp(4x)=\exp(4x),$$

$$8A+\cancel{16Ax}-5A-\cancel{20Ax}+\cancel{4Ax}=1,$$

$$3A=1,$$

$$A=\frac{1}{3}.$$

Таким образом, частное решение имеет вид:

$$y_1=\frac{x}{3}\exp(4x).$$

Теперь можно записать полное решение неоднородного уравнения:

$$y=y_0+y_1=C_1\exp(4x)+C_2\exp(x)+\frac{x}{3}\exp(4x).$$

Пример 4.

Найти общее решение уравнения $y''+9y=2x^2-5$.

*Решение.*

Сначала определим общее решение соответствующего однородного уравнения. Вычислим корни характеристического уравнения:

$$k^2+9=0,\quad \Rightarrow\ k^2=-9,\quad \Rightarrow\ k_{1,2}=\pm 3i.$$

Следовательно, решение однородного уравнения записывается в виде:

$$y_0(x)=C_1\cos(3x)+C_1\sin(3x).$$

Построим теперь частное решение. Правая часть в заданном уравнении является квадратичной функцией. Поэтому попробуем найти частное решение в аналогичной форме:

$$y_1=Ax^2+Bx+C,$$

где числа $A$, $B$, $C$ можно определить методом неопределенных коэффициентов. В результате получаем:

$$y_1'=2Ax+B,\qquad y_1''=2A$$

Подставляем это в исходное неоднородное дифференциальное уравнение:

$$2A+9\left(Ax^2+Bx+C\right)=2x^2-5,$$

$$2A+9Ax^2+9Bx+9C=2x^2-5.$$

Приравнивая коэффициенты при членах с одинаковыми степенями $x$, находим:

$$\begin{cases} 9A = 2 \\ 9B = 0 \\ 2A + 9C = -5 \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{2}{9} \\ B = 0 \\ C = -\dfrac{49}{81} \end{cases}.$$

Таким образом, частное решение определяется формулой

$$y_1 = \frac{2}{9}x^2 - \frac{49}{81}.$$

Тогда общее решение исходного неоднородного дифференциального уравнения выражается в виде:

$$y = y_0 + y_1 = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) + \frac{2}{9}x^2 - \frac{49}{81}.$$

Пример 5.

Решить дифференциальное уравнение $y'' + 16y = 2\cos^2 x$.

*Решение.*

Прежде всего, решим соответствующее однородное уравнение.

Характеристическое уравнение имеет корни:

$$k^2 + 16 = 0, \quad \Rightarrow k^2 = -16, \quad \Rightarrow k_{1,2} = \pm 4i,$$

так что общее решение однородного уравнения записывается в виде:

$$y_0(x) = C_1\cos(4x) + C_2\sin(4x).$$

Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения. Представим правую часть как

$$2\cos^2 x = \cos(2x) + 1.$$

Отсюда следует, что частное решение определяется функцией

$$y_1 = A\cos(2x) + B\sin(2x) + C,$$

где числа $A$, $B$ и $C$ можно вычислить, используя метод неопределенных коэффициентов. Первая и вторая производные функции $y_1$ равны:

$$y_1' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x),$$

$$y_1'' = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x).$$

Подставляя это в дифференциальное уравнение, находим:

$$-4A\cos(2x)-4B\sin(2x)+16\left[A\cos(2x)+B\sin(2x)+C\right]=\cos(2x)+1,$$

$$-4A\cos(2x)-4B\sin(2x)+16A\cos(2x)+16B\sin(2x)+16C=\cos(2x)+1,$$

$$12A\cos(2x)+12B\sin(2x)+16C=\cos(2x)+1.$$

Последнее выражение является тождеством. Поэтому можно записать следующую систему уравнений для определения коэффициентов $A$, $B$, $C$:

$$\begin{cases}12A=1\\12B=0,\\16C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{12}\\B=0\\C=\frac{1}{16}\end{cases}.$$

Следовательно, частное решение имеет вид:

$$y_1=\frac{1}{12}\cos(2x)+\frac{1}{16}.$$

Соответственно, общее решение неоднородного уравнения записывается как

$$y=y_0+y_1=C_1\cos(4x)+C_2\sin(4x)+\frac{1}{12}\cos(2x)+\frac{1}{16}.$$

Пример 6.

Решить уравнение $y''+y=\sec^2 x$, используя метод вариации постоянных.
*Решение.*

Найдем решение соответствующего однородного уравнения $y''+y=0$.
Характеристическое уравнение имеет корни:

$$k^2+1=0,\quad\Rightarrow\ k_{1,2}=\pm i.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения записывается в виде:

$$y_0(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Найдем теперь общее решение исходного неоднородного уравнения. В соответствии с методом вариации постоянных, будем рассматривать коэффициенты $C_1$ и $C_2$ как функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

Производные $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ определяются следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ C_1'(x)(\cos x)' + C_2'(x)(\sin x)' = \sec^2 x \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{cases}.$$

Из первого уравнения находим:

$$C_1'(x) = -C_2'(x)\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Подставляя во второе уравнение, получаем:

$$-\left[-C_2'(x)\frac{\sin x}{\cos x}\right]\sin x + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$C_2'(x)\left(\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x\right) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$C_2'(x)\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$C_2'(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Следовательно,

$$C_1'(x) = -\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Интегрируем полученные выражения, чтобы найти функции $C_1(x)$, $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \int C_1'(x)dx = \int\left(-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx = \int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x} + A_1,$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x)dx = \int\frac{dx}{\cos x} = \int\frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x} = \int\frac{d(\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + A_2.$$

В результате находим, что общее решение неоднородного уравнения представляется в виде:

$$y(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x = \left(-\frac{1}{\cos x} + A_1\right)\cos x + \left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + A_2\right)\sin x$$

$$= A_1\cos x + A_2\sin x - 1 + \frac{\sin x}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|,$$

где $A_1$, $A_2$ − постоянные числа.

Пример 7.

Найти решение дифференциального уравнения $y'' - 7y' + 12y = 8\sin x + \exp(3x)$.

*Решение.*

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y'' - 7y' + 12y = 0$. Корни вспомогательного характеристического уравнения равны:

$$k^2 - 7k + 12 = 0, \quad \Rightarrow D = 49 - 4\cdot 12 = 1, \quad \Rightarrow k_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2} = 4,\ 3.$$

Следовательно, общее решение однородного уравнения определяется выражением:

$$y_0(x) = C_1 \exp(4x) + C_2 \exp(3x).$$

Видно, что правая часть представляет собой сумму двух функций.

Согласно принципу суперпозиции, частное решение можно представить в виде:

$$y_1(x) = y_2(x) + y_3(x),$$

где $y_2(x)$ − частное решение дифференциального уравнения $y'' - 7y' + 12y = 8\sin x$,

а $y_3(x)$ − частное решение дифференциального уравнения $y'' - 7y' + 12y = \exp(3x)$.

Сначала определим функцию $y_2(x)$. В данном случае мы будем искать решение в форме

$$y_2(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Подставим функцию $y_2(x)$ и ее производные

$$y_2'(x) = -A\sin x + B\cos x, \qquad y_2''(x) = -A\cos x - B\sin x$$

в соответствующее дифференциальное уравнение:

$$y'' - 7y' + 12y = 8\sin x,$$

$$-A\cos x - B\sin x - 7(-A\sin x + B\cos x) + 12(A\cos x + B\sin x) = 8\sin x,$$

$$-\underline{A\cos x} - \underline{\underline{B\sin x}} + \underline{\underline{7A\sin x}} - \underline{7B\cos x} + \underline{12A\cos x} + \underline{\underline{12B\sin x}} = \underline{\underline{8\sin x}},$$

$$(11A - 7B)\cos x + (11B + 7A)\sin x = 8\sin x.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 11A - 7B = 0 \\ 11B + 7A = 8 \end{cases}, \quad \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{28}{85} \\ B = \dfrac{44}{85} \end{cases}.$$

Тогда получаем: $y_2(x) = 2\sin x$.

Аналогично можно сконструировать частное решение $y_3(x)$ для уравнения $y'' - 7y' + 12y = \exp(3x)$. Заметим, что здесь показатель степени в экспоненциальной функции совпадает с корнем $k_2 = 3$ характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения. Поэтому, мы будем искать частное решение в форме

$$y_3(x) = Ax\exp(3x).$$

Производные имеют вид:

$$y_3'(x) = \left[Ax\exp(3x)\right]' = A\exp(3x) + 3Ax\exp(3x),$$

$$y_3''(x) = \left[A\exp(3x) + 3Ax\exp(3x)\right]' = 3A\exp(3x) + 3A\exp(3x) + 9Ax\exp(3x) = 6A\exp(3x) + 9Ax\exp(3x).$$

Подставляем функцию $y_3(x)$ и ее производные в дифференциальное уравнение:

$$6A\exp(3x) + 9Ax\exp(3x) - 7\left[A\exp(3x) + 3Ax\exp(3x)\right] + 12Ax\exp(3x) = \exp(3x),$$

$$\underline{6A\exp(3x)} + \underline{\underline{9A\cancel{x\exp(3x)}}} - \underline{7A\exp(3x)} - \underline{\underline{21A\cancel{x\exp(3x)}}} + \underline{\underline{12A\cancel{x\exp(3x)}}} = \exp(3x),$$

$$-A\exp(3x) = \exp(3x).$$

Как видно, $A = -1$. Следовательно, частное решение $y_3(x)$ можно записать в виде:

$$y_3(x) = -x\exp(3x).$$

В результате, общее решение исходного неоднородного уравнения определяется выражением

$$y = y_0 + y_2 + y_3 = C_1\exp(4x) + C_2\exp(3x) + 2\sin x - x\exp(3x).$$

## Тема 4.1 «Основы теории вероятностей и математической статистики»

### Лекция №21
### Сумма и произведение событий. Условная вероятность.
### План.

**1.**

### Лекция №22
### Вероятность произведения независимых событий.
### План.

**1.**

### Лекция №23

**Дискретная и непрерывная случайные величины.**

**План.**

**1.**

**Лекция №24**

**Закон распределения дискретной случайной величины.**

**План.**

**1.**

**Лекция №25**

**Математическое ожидание.**

**План.**

**1.**

**Лекция №26**

**Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины.**

**План.**

**1.Среднее значение случайной величины.**

**2.Дисперсия случайной величины. Стандартное отклонение.**

**Среднее значение случайной величины.**

Среднее значение генеральной совокупности [redacted] находят по формуле:

[redacted] (1)

где

[redacted] - число единиц генеральной совокупности,

[redacted] - значение *j*-го наблюдения.

Если случайная величина выборки *X* может принимать значения [redacted] с вероятностями соответственно [redacted], то средним значением [redacted] величины *X* для выборки (её математическим ожиданием *E(x)* ,будет

[redacted] или [redacted]

или же [redacted] (2)

для негруппированных выборок и

[redacted] (3)

для группированных выборок, где

[redacted] - число единиц выборки,

[redacted] - число классов,

[redacted]- значение *i*-го класса,

[redacted]- частота *i*-го класса.

**Пример 1.** В таблице даны значения средней температуры воздуха в населённом пункте *N* в 2014 году:

| Месяц | [redacted] |
|---|---|
| 1 | -2,3 |
| 2 | -4,0 |
| 3 | 2,0 |
| 4 | 9,0 |
| 5 | 10,0 |
| 6 | 19,4 |
| 7 | 19,9 |
| 8 | 17,1 |
| 9 | 14,9 |
| 10 | 7,3 |
| 11 | 2,2 |
| 12 | -0,3 |

Найти среднюю температуру воздуха.

Решение. Найдём среднюю температуру воздуха как среднее значение для негруппированной выборки:

$$\bar{x} = \frac{1}{12} \bullet ((-2,3) + (-4,0) + 2,0 + \ldots +$$

$$+7,3 + 2,2 + (-0,3)) = \frac{95,2}{12} = 7,9.$$

**Пример 2.** В таблице – данные о группировке сельских хозяйств по урожайности зерновых:

| Урожайность зерновых в центнерах с га | Число сельских хозяйств – абсолютное | Удельный вес сельских хозяйств – в процентах |
|---|---|---|
| до 5,0 | 4244 | 6,2 |
| 5,1-10,0 | 10446 | 15,2 |
| 10,1-15,0 | 18956 | 27,5 |

| | | |
|---|---|---|
| 15,1-20,0 | 20207 | 29,3 |
| 20,1-25,0 | 8159 | 11,9 |
| 25,1-30,0 | 4145 | 6,0 |
| 30,1-35,0 | 1316 | 1,9 |
| 35,1-40,0 | 792 | 1,2 |
| 40,1-45,0 | 183 | 0,3 |
| 45,1-50,0 | 182 | 0,3 |
| 50,1-55,0 | 161 | 0,2 |
| Всего | 68791 | 100,0 |

Найти среднюю урожайность зерновых.

Решение. Так как имеем только группированные данные и неизвестна средняя урожайность каждой группы, как приближенные значения к средней каждой группы примем центры интервалов:

| Центры интервалов [redacted] | [redacted] | [redacted] |
|---|---|---|
| 2,5 | 4222 | 10610,0 |
| 7,5 | 10446 | 78345,0 |
| 12,5 | 18956 | 236950,0 |
| 17,5 | 20207 | 363622,5 |
| 22,5 | 8159 | 183577,5 |
| 27,5 | 4145 | 113987,5 |

| | | |
|---|---|---|
| 32,5 | 1316 | 42770,0 |
| 37,5 | 792 | 29700,0 |
| 42,5 | 183 | 7777,5 |
| 47,5 | 182 | 8645,0 |
| 52,5 | 161 | 8452,5 |
| Всего | 68791 | 1074437,5 |

Найдём искомую среднюю урожайности зерновых:

$$\bar{x} = \frac{1}{68791} \bullet (2,5 \bullet 4244 + 7,5 \bullet 10446 + \ldots +$$
$$+47,5 \bullet 182 + 52,5 \bullet 161) =$$
$$= \frac{1}{68791} \bullet 1074437,5 = 15,6.$$

Итак, средняя урожайность по выборке составляет 15,6 центнеров с га.

**Дисперсия случайной величины. Стандартное отклонение.**

Дисперсией случайной величины называется среднее значение квадрата отклонения случайной величины от её среднего значения. Дисперсию генеральной совокупности рассчитывают по формуле:

[redacted] (4)

Дисперсию выборки рассчитывают по формуле:

[redacted] (5)

для негруппированных выборок и

[redacted] (6)

для группированных выборок.

**Пример 3.** В таблице – данные о возрасте жителей административной территории Т в 2013 году. Не будем приводить эту таблицу из-за её громоздкости. Отметим лишь, что в таблице дана численность каждого из возрастов (по одному году, например, 33 года, 40 лет, 65 лет и т.д.) в группах от 0 лет по 94 года (включительно) и численность всей возрастной группы в интервале 95-99 лет, а также численность жителей старше 100 лет.

Требуется найти средний возраст жителей административной территории и дисперсию среднего возраста.

Решение. Найдём средний возраст. Так как данные в таблице являются данными генеральной совокупности, находим средний возраст генеральной совокупности:

$$\mu = \frac{1}{2424150}(0 \bullet 19212 + 1 \bullet 18145 + \ldots +$$
$$+ 94 \bullet 814 + 97 \bullet 1112 + 100 \bullet 119) = 38,2.$$

В таблице – данные о числе жителей каждого возраста, исключение же – жители в возрасте 95-99 лет и старше 100 лет. Поэтому рассчитали центр интервала возрастной группы 95-99 лет: 97 лет и в расчётах использовали его.

Так как число жителей старше 100 лет относительно небольшое, чтобы упростить расчёты, нижнюю границу интервала приняли за значение признака.

Итак, средний возраст жителей административной территории Т – 38,2 года

Найдём теперь его дисперсию:

$$\sigma^2 = \frac{19212 \bullet (0 - 38,2)^2}{2424150} +$$
$$+ \frac{18145 \bullet (1 - 38,2)^2}{2424150} + \ldots +$$
$$+ \frac{119 \bullet (100 - 38,2)^2}{2424150} \approx 487,87.$$

**Пример 4.** Найти дисперсию урожайности зерновых в сельских хозяйствах, используя данные примера 2.

Решение. Средняя урожайность по выборке составляет 15,6 центнеров с га. Чтобы найти дисперсию, создадим дополнительную таблицу.

| Центры интервалов | Число хозяйств | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2,5 | 4244 | -13,1 | 172,1 | 730412,3 |
| 7,5 | 10446 | -8,1 | 65,9 | 688558,6 |
| 12,5 | 18956 | -3,1 | 9,7 | 184391,3 |
| 17,5 | 20207 | 1,9 | 3,5 | 71505,7 |
| 22,5 | 8159 | 6,9 | 47,3 | 386328,5 |
| 27,5 | 4165 | 11,9 | 141,2 | 585113,6 |
| 32,5 | 1316 | 16,9 | 285,0 | 375024,0 |
| 37,5 | 792 | 21,9 | 478,8 | 379196,9 |
| 42,5 | 183 | 26,9 | 722,6 | 132234,9 |
| 47,5 | 182 | 31,9 | 1016,4 | 184986,0 |
| 52,5 | 161 | 36,9 | 1360,2 | 218995,1 |
| Всего | 68791 | - | - | 393679,1 |

Найдём искомую дисперсию:

$$s^2 = \frac{4244 \bullet (2,5-15,6)^2}{68791-1} +$$

$$+ \frac{10446(7,5-15,6)^2}{68791-1} + \ldots +$$

$$+ \frac{161 \bullet (52,5-15,6)^2}{68791-1} = 57,2.$$

**Пример 5.** Найти дисперсию температуры в населённом пункте *N* в 2009 году, используя данные примера 1.

Решение. Данная выборка – негруппированная, найдём дисперсию температуры для негруппированной выборки:

$$s^2 = \frac{1}{12}(-2{,}3-7{,}9)^2 + (-4{,}0-7{,}9)^2 + \ldots$$
$$\ldots + (-0{,}3-7{,}9)^2 = 72{,}37.$$

Стандартное отклонение равно положительному корню из дисперсии. Стандартное отклонение генеральной совокупности находят по формуле

[redacted] (7)

Стандартное отклонение выборки находят по формуле

[redacted]. (9)

для негруппированных выборок и

[redacted] (10)

для группированных выборок.

## Тема 5.1 «Множества и операции над ними»

### Лекция №27
### Элементы и множества. Задание множеств. Операции над множествами.
**План.**

**1.Понятие множества.**
**2.Равные множества.**
**3.Опрерации над множествами.**

**Множество** - это совокупность объектов, рассматриваемая как одно целое. Понятие множества принимается за основное, т. е. не сводимое к другим понятиям. Объекты, составляющие данное множество, называются его элементами. Основное отношение между элементом *a* и содержащим его множеством *A* обозначается так $a \in A$ (*a* есть элемент множества *A*; или *a* принадлежит *A*, или *A* содержит *a*). Если *a* не является элементом множества *A*, то пишут $a \notin A$ (*a* не входит в *A*, *A* не содержит *a*). Множество можно задать указанием всех его элементов, причем в этом случае употребляются фигурные скобки. Так {*a*, *b*, *c*} обозначает множество трех элементов. Аналогичная запись употребляется и в случае бесконечных множеств, причем невыписанные элементы заменяются многоточием. Так, множество натуральных чисел обозначается {1, 2, 3, ...}, а множество четных чисел {2, 4, 6, ...}, причем под многоточием в первом случае подразумеваются все натуральные числа, а во втором -

только четные.

Два множества $A$ и $B$ называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. если каждый элемент множества $A$ $B$ и, обратно, каждый элемент $B$ $A$. Тогда пишут $A = B$. Таким образом, множество однозначно определяется его элементами и не зависит от порядка записи этих элементов. Например, множество из трех элементов $a$, $b$, $c$допускает шесть видов записи:

$$\{a, b, c\} = \{a, c, b\} = \{b, a, c\} = \{b, c, a\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\}.$$

Из соображений формального удобства вводят еще так называемое "пустое множество", а именно, множество, не содержащее ни одного элемента. Его обозначают $\varnothing$, иногда символом 0 (совпадение с обозначением числа нуль не ведет к путанице, так как смысл символа каждый раз ясен).

Если каждый элемент множества $A$ входит во множество $B$, то $A$ называется подмножеством $B$, а $B$ называется надмножеством $A$. Пишут $A \subseteq B,\ B \supseteq A$ ($A$ входит в $B$ или $A$ содержится в $B$, $B$ содержит $A$). Очевидно, что если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A = B$. Пустое множество по определению считается подмножеством любого множества.

Если каждый элемент множества $A$ входит в $B$, но множество $B$ содержит хотя бы один элемент, не входящий в $A$, т. е. если $A \subseteq B$ и $A \neq B$,
то $A$ называется **собственным подмножеством** $B$, а $B$ - **собственным надмножеством** $A$. В этом случае пишут $A \subset B,\ B \supset A$. Например, запись $A \neq 0$ и $A \supset 0$ означают одно и то же, а именно, что множество $A$ не пусто.

Заметим еще, что надо различать элемент $a$ и множество $\{a\}$, содержащее $a$ в качестве единственного элемента. Такое различие диктуется не только тем, что элемент и множество играют неодинаковую роль (отношение $a \in A$ не симметрично), но и необходимостью избежать противоречия. Так, пусть $A = \{a, b\}$ содержит два элемента. Рассмотрим множество $\{A\}$, содержащее своим единственным элементом множество $A$. Тогда $A$ содержит два элемента, в то время как $\{A\}$ - лишь один элемент, и потому отождествление этих двух множеств невозможно. Поэтому рекомендуется применять запись $a \in A$, и не пользоваться записью $a \subset A$.

**Примеры множеств.** Примеров множеств можно привести сколько угодно. Так, можно говорить о множестве всех букв книги, причем одна и та же буква на разных страницах или разных строках одной страницы считается за два различных элемента множества, о множестве всех людей земного шара, причем надо сделать предположение, что в рассматриваемый момент времени никто не рождается и не умирает, о множестве молекул воды в данном стакане и т. д.

Все это - конечные множества. Приведем некоторые примеры бесконечных множеств, кроме упоминавшихся выше множеств натуральных чисел, четных натуральных чисел, рациональных чисел, действительных чисел и др.

Пусть $a$ и $b$ - два действительных числа, причем $a < b$. Множество всех действительных чисел $x$, для которых $a \leq x \leq b$, называется **отрезком** с концами $a$, $b$ и обозначается через $[a, b]$. Множество $(a, b)$ всех $x$, для которых $a < x < b$, называется **интервалом** с концами $a$, $b$. Далее **полуинтервалами** называются множества [$a$, $b$) тех $x$, для которых $a \le x < b$, и ($a$, $b$] тех $x$, для которых $a < x \le b$. Введем еще два символа: $+\infty$ (плюс бесконечность), $-\infty$ (минус бесконечность). Они не являются числами и вводятся лишь для удобства записи. Тем не менее для более легкого обращения с ними условимся говорить, что $+\infty$ больше, а $-\infty$ меньше любого действительного числа. Тогда можно ввести обозначения, аналогичные приведенным выше, для бесконечных полуинтервалов и интервалов. Именно: $[a, +\infty)$ - множество чисел $x$, для которых $a \le x$, $(-\infty, b]$ - множество чисел $x$, для которых $x \le b$, $(a, +\infty)$ - множество чисел $x$, для которых $a < x$, $(-\infty, b)$ - множество чисел $x$, для которых $x < b$, $(-\infty, +\infty)$ - множество всех действительных чисел.

**Операции над множествами**

**Объединением** множеств $A$ и $B$ называется множество элементов, принадлежащих по крайней мере одному из данных множеств (т. е. либо $A$, либо $B$, либо одновременно и $A$ и $B$). Обозначают $A \bigcup B$ и читают "объединение $A$ и $B$".

**Пересечением** множеств $A$ и $B$ называется множество элементов, принадлежащих одновременно и $A$ и $B$. Обозначают $A \bigcap B$ и читают "пересечение $A$ и $B$".

**Разностью** множеств $A$ и $B$ называется множество элементов, принадлежащих $A$ и не принадлежащих $B$. Обозначают $A \backslash B$ и читают "разность $A$ и $B$".

Пример 1. Пусть $A$ есть отрезок [1, 3], $B$ - отрезок [2, 4]; тогда объединением $A \bigcup B$ будет отрезок [1, 4], пересечением $A \bigcap B$ - отрезок [2, 3], разностью $A \backslash B$ - полуинтервал [1, 2), $B \backslash A$ - полуинтервал (3, 4].

Пример 2. Пусть $A$ есть множество прямоугольников, $B$ - множество всех ромбов на плоскости. Тогда $A \bigcap B$ есть множество всех квадратов, $A \backslash B$ - множество прямоугольников с неравными сторонами, $B \backslash A$ - множество всех ромбов с неравными углами.

Операции объединения и пересечения множеств обладают многими свойствами сложения и умножения чисел, например переместительным, сочетательным и распределительным свойствами.

Понятия объединения и пересечения множеств дословно переносятся на случай более двух множеств и даже на случай любого конечного или бесконечного множества множеств.

Для удобства будем называть **системами** такие множества, элементами которых служат другие множества. Тогда **объединением множеств некоторой системы** называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих по крайней мере одному множеству данной системы. **Пересечением множеств некоторой системы** называется множество, состоящее из элементов, входящих во все множества данной системы.

Применяются следующие обозначения. В случае конечной системы множеств $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ объединение $S$ и пересечение $D$ обозначаются:

$$S = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ \dots \ \bigcup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

$$D = A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ \dots \ \bigcap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

**Тема 5.2 «элементы математической логики»**

**Лекция №28**
**Общие понятия. Логические операции над высказываниями.**
**План.**

**1.Понятие высказывания.**
**2.Отрицание высказывания.**
**3. Конъюнкция двух высказываний.**
**4. Дизъюнкция двух высказываний.**
**5. Импликация двух высказываний.**
**6. Эквивалентность двух высказываний**

**Понятие высказывания.**

Предметом исследования алгебры высказываний являются высказывания. Но алгебра высказываний не ставит целью их всестороннее изучение. Из многочисленных свойств высказывания алгебру высказываний интересует лишь одно: истинно оно или ложно. Именно это и является определяющим свойством высказывания. Итак, под **высказыванием** понимается такое предложение, которое либо истинно, либо ложно. Высказывание не может быть одновременно и истинным, и ложным.

В дальнейшем будем считать, что имеется первоначальная совокупность некоторых простейших высказываний, называемых элементарными или исходными, о каждом из которых точно известно, истинно оно или ложно. Причем в этой совокупности имеются как истинные высказывания, так и ложные.

Договоримся обозначать конкретные высказывания начальными заглавными буквами латинского алфавита $A, B, C, D, \dots$ или теми же буквами с индексами внизу.

Приведем **примеры высказываний**, которые будут использованы в дальнейшем:

$A_1$: "Москва — столица России";
$A_2$: "Саратов находится на берегу Невы";
$A_3$: "Все люди смертны";
$A_4$: "Сократ — человек";
$A_5$: "7 < 4";
$A_6$: "Волга впадает в Каспийское море";
$A_7$: "А.С.Пушкин — великий русский математик";
$A_8$: "Снег белый".

Обозначив истинное высказывание символом 1, а ложное — 0, введем функцию $\lambda$, заданную на совокупности всех высказываний и принимающую значения в двухэлементном множестве $\{0; 1\}$, по следующему правилу:

Функция $\lambda$ называется функцией истинности, а значение $\lambda(P)$ — логическим значением или значением истинности высказывания $P$. Для приведенных высказываний имеем логические значения:

Отметим, что в литературе имеются следующие обозначения для истинных высказываний: 1, И, t (от англ. *true* — истинный) и для ложных высказываний: 0, Л, f (от англ. *false* — ложный). Из этих обозначений будем использовать 1 и 0. Это обусловлено рядом причин. Во-первых, таблицы истинности для формул алгебры высказываний принимают более лаконичный и стандартизированный вид, так как в этом случае наборы значений пропозициональных переменных можно расположить в порядке возрастания чисел, которые этими наборами закодированы в двоичной системе счисления. Например, для случая трех пропозициональных переменных $X$, $T$, $Z$ набор значений этих переменных 000 означает двоичную запись десятичного числа 0, набор 001 — двоичную запись десятичного числа 1, набор 010 — двоичную запись десятичного числа 2, 011 — 3, 100 — 4, 101 — 5, 110 —6, 111 — 7. Во-вторых, более удобный и математически строгий вид принимают многие формулы и алгоритмы алгебры высказываний. В-третьих, обозначение 0 и 1 принято и более целесообразно в приложениях математической логики к компьютерам и информатике.

Из элементарных высказываний с помощью операций над высказываниями или логических связок строят сложные высказывания. Перейдем к точному описанию таких построений.

**Отрицание высказывания.**

**Определение 1.1.** Отрицанием высказывания $P$ называется новое высказывание, обозначаемое $\neg P$ (читается: "не $P$" или "не верно, что$P$"), которое истинно, если высказывание $P$ ложно, и ложно, если высказывание $P$ истинно. Другими словами, логическое значение высказывания $\neg P$ связано с логическим значением высказывания $P$, как указано в следующей таблице, называемой ***таблицей истинности операции отрицания***:

Здесь может возникнуть вопрос, почему приписывание истинности или ложности высказыванию $\neg P$ осуществляется именно на основании приведенной таблицы. Конечно, можно ответить, что об определениях не спорят. Но ведь мы желаем построить математическую теорию (алгебру высказываний), которая в какой-то мере отражала бы реально существующий в природе человеческого мышления процесс построения составных высказываний из элементарных и имела бы реальный смысл. Затем мы должны будем развить нашу математическую теорию, а полученные выводы применить в практике мышления и при этом не войти в противоречие с общеизвестными законами мышления. Определение отрицания с помощью приведенной таблицы (как, впрочем, и других логических связок с помощью соответствующих таблиц, о чем речь пойдет далее) появилось как результат длительного опыта, и оно полностью оправдало себя на практике.

**Пример 1.2.** Применим операцию отрицания к высказыванию $A_6$: "Волга впадает в Каспийское море". Данное отрицание можно читать так: "Неверно, что $A_6$" т.е. "Неверно, что Волга впадает в Каспийское море". Или же частицу "не" переносят на такое место (чаще всего ставят перед сказуемым), чтобы получилось правильно составленное предложение: "Волга не впадает в Каспийское море". Таблица из определения 1.1 дает для данного высказывания следующее логическое значение: $\lambda(\neg A_6) = \neg\lambda(A_6) = \neg 1 = 0$, т.е. высказывание $\neg A_6$ ложно. Ложность высказывания $\neg A_6$ обусловлена только истинностью исходного высказывания $A_6$ и определением 1.1, но никак не соображениями смысла (содержания) высказывания $\neg A_6$. Другое дело, что само определение 1.1 потому и имеет такую формулировку, что оно правильно (или, как говорят, адекватно) отражает факты, известные нам из практики.

**Конъюнкция двух высказываний.**

**Определение 1.3.** Конъюнкцией тух. высказываний $P$ и $Q$ называется новое высказывание, обозначаемое $P \wedge Q$ или $P \;\&\; Q$(читается: "$P$ и $Q$"), которое истинно лишь в единственном случае, когда истинны оба исходных высказывания $P$ и $Q$, и ложно во всех остальных случаях. Другими словами, логическое значение высказывания $P \wedge Q$ связано с логическими значениями высказываний $P$ и $Q$, как указано в следующей таблице, называемой ***таблицей истинности операции конъюнкции***:

Практика полностью подтвердила, что именно такое распределение значений истинности наиболее соответствует тому смыслу, который придается в процессе мыслительной деятельности связующему союзу "и".

**Пример 1.4.** Применим операцию конъюнкции к высказываниям $A_2$ и $A_3$. Получим высказывание $A_2 \wedge A_3$ л Л3: "Саратов находится на берегу Невы, и все люди смертны". Конечно, мы не воспринимаем это высказывание как истинное из-за первой, ложной, его части. К выводу о ложности полученного высказывания также придем, исходя из логических значений исходных высказываний $A_2$ и $A_3$ и определения 1.3 конъюнкции на основании приведенной там таблицы. В самом деле,

$$\lambda(A_2 \wedge A_3) = \lambda(A_2) \wedge \lambda(A_3) = 0 \wedge 1 = 0.$$

**Дизъюнкция двух высказываний.**

**Определение 1.5.** Дизъюнкцией двух высказываний $P$ и $Q$ называется новое высказывание, обозначаемое $P \vee Q$ (читается "$P$ или $Q$"), которое истинно в тех случаях, когда хотя бы одно из высказываний $P$ или $Q$ истинно, и ложно в единственном случае, когда оба высказывания $P$ и $Q$ ложны. Другими словами, $P \vee Q$ — такое высказывание, логическое значение которого связано с логическими значениями исходных высказываний $P$ и $Q$ так, как указано в следующей таблице, называемой ***таблицей истинности операции дизъюнкции***:

**Пример 1.6.** Применим операцию дизъюнкцию к высказываниям $A_3$ и $A_5$. Получим составное высказывание $A_3 \vee A_5$ : "Все люди смертны, или $7 < 4$". Несмотря на первоначально кажущуюся странность этого высказывания, нет сомнений в его истинности. К аналогичному заключению приводит также формальное вычисление логического значения данного высказывания по таблице из определения 1.5, исходя из логических значений высказываний $A_3$ и $A_5$ :

$$\lambda(A_3 \vee A_5) = \lambda(A_3) \vee \lambda(A_5) = 1 \vee 0 = 1.$$

В то же время высказывание "Саратов находится на берегу Невы, или А. С. Пушкин — великий русский математик", являющееся дизъюнкцией высказываний $A_2$ и $A_7$, безусловно, ложно, что полностью согласуется с формальным вычислением его логического значения по таблице из определения 1.5:

$$\lambda(A_2 \vee A_7) = \lambda(A_2) \vee \lambda(A_7) = 0 \vee 0 = 0.$$

**Импликация двух высказываний.**

**Определение 1.7.** Импликацией двух высказываний $P$ и $Q$ называется новое высказывание, обозначаемое $P \to Q$ (читается: "если $P$, то $Q$", или "из $P$ следует $Q$", или "$P$ влечет $Q$", или "$P$ достаточно для $Q$", или "$Q$ необходимо для $P$"), которое ложно в единственном случае, когда высказывание $P$ истинно, а $Q$ — ложно, а во всех остальных случаях — истинно. Другими словами, логическое значение высказывания $P \to Q$ связано с логическими значениями высказываний $P$ и $Q$, как указано в следующей таблице, называемой ***таблицей истинности операции импликации***:

В высказывании $P \to Q$ высказывание $P$ называется посылкой или антецедентом, а высказывание $Q$ — следствием или консеквентом.

При определении импликации с еще большей силой встает вопрос, почему именно такое распределение принято в ее таблице истинности. Последние две строки в ней достаточно хорошо согласуются с нашим пониманием выражения "*если..., то...*". Их обоснованием могут служить следующие соображения. Импликация призвана отразить процесс рассуждения, умозаключения. Общая характеристика этого процесса следующая. Если мы исходим из истинной посылки и правильно (верно) рассуждаем, то мы приходим к истинному заключению (следствию, выводу). Другими словами, если мы исходили из истинной посылки и пришли к ложному выводу, значит, мы неверно рассуждали. В импликации $P \to Q$ имеется посылка $P$, следствие $Q$ и процесс рассуждения $\to$. Процесс рассуждения как раз и моделируется результатом операции $P \to Q$. Приведенное соображение служит обоснованием результата $1 \to 0 = 0$, а также результата $1 \to 1 = 1$.

Определенные сомнения возникают при оценке адекватности первых двух строк в таблице, определяющей импликацию. В первой строке при ложной посылке и ложном следствии импликация признается истинной. Следующие два примера добавляют аргументы в пользу такого определения логического значения импликации в этом случае. Рассмотрим такое высказывание: "Если число делится на 5, то и его квадрат делится на 5". Его истинность не вызывает сомнения. В частности, мы могли бы сказать: "Если 10 делится на 5, то $10^2$ делится на 5" или "Если 11 делится на 5, то и $11^5$ делится на 5". В первом из этих высказываний и посылка, и следствие истинны, во втором — и посылка, и следствие ложны. Тем не менее оба этих высказывания истинны. Для большей убедительности второе высказывание можно сформулировать в сослагательной форме: "Если бы 11 делилось на 5, то и $11^2$ делилось бы на 5". Есть утверждения такого типа и в житейской речи, которые признаются вполне нормальными. Например, "Если ты можешь переплыть Черное море, то я — турецкий султан".

В пользу второй строки таблицы, когда импликация остается истинной при ложной посылке и истинном следствии, говорит такой пример. Высказывание "Если первое слагаемое делится на 5 и второе слагаемое делится на 5, то и сумма делится на 5", несомненно, истинно. Но, в частности, мы могли бы сказать: "Если 10 делится на 5 и 20 делится на 5, то 30 делится на 5" или "Если 12 делится на 5 и 13 делится на 5, то 25 делится на 5". В первом из этих высказываний и посылка истинна (как конъюнкция двух истинных выражений), и следствие истинно. Во втором же высказывании посылка ложна (как конъюнкция двух ложных высказываний), а следствие истинно. Тем не менее, как мы уже отметили, оба этих высказывания признаются истинными.

**Пример 1.8.** Высказывание $A_6 \to A_5:$ "Если Волга впадает в Каспийское море, то $7 < 4$" ложно, так как

$$\lambda(A_6 \to A_5) = \lambda(A_6) \to \lambda(A_5) = 1 \to 0 = 0.$$

Высказывание "Если Саратов находится на берегу Невы, то А. С. Пушкин — великий русский математик", являющееся импликацией высказываний $A_2$ и $A_7$, истинно, так как

$$\lambda(A_2 \to A_7) = \lambda(A_2) \to \lambda(A_7) = 0 \to 0 = 1.$$

**Эквивалентность двух высказываний.**

**Определение 1.9.** Эквивалентностью двух высказываний $P$ и $Q$ называется новое высказывание, обозначаемое $P \leftrightarrow Q$ (читается: "$P$эквивалентно $Q$", или "$P$ необходимо и достаточно для $Q$", или "$P$ тогда и только тогда, когда $Q$", или "$P$, если и только если $Q$"), которое истинно в том и только в том случае, когда одновременно оба высказывания $P$ и $Q$ либо истинны, либо ложны, а во всех остальных случаях — ложно. Другими словами, логическое значение высказывания $P \leftrightarrow Q$ связано с логическими значениями высказываний $P$ и $Q$, как указано в следующей таблице, называемой ***таблицей истинности операции эквивалентности***:

**Пример 1.10.** Высказывание "$7 < 4$ тогда и только тогда, когда снег белый", являющееся эквивалентностью высказываний $A_5$ и $A_8$, ложно, так как

$$\lambda(A_5 \leftrightarrow A_8) = \lambda(A_5) \leftrightarrow \lambda(A_8) = 0 \leftrightarrow 1 = 0.$$

Напротив, высказывание "Саратов находится на берегу Невы, если и только если А.С.Пушкин — великий русский математик" истинно, так как оно является эквивалентностью двух ложных высказываний.